

## EXERCICE 2

### [ Centres Étrangers 2016 ]

#### Partie A: Étude de quelques exemples

1. a. Déterminons la valeur de " a " si  $f$  est une fonction constante strictement positive:

Si  $f$  est une fonction constante strictement positive, nous pouvons alors écrire, pour tout  $x \in [0; l]$ :  $f(x) = K$ , avec  $K > 0$ .

Ici, il s'agit de déterminer " a " tel que:  $I_1 = I_2$ , avec:  $I_1 = \int_0^a f(x) dx$   
et:  $I_2 = \int_a^l f(x) dx$ .

$f$  est continue sur  $[0; l]$ , donc sur  $[0; a]$  et  $[a; l]$ . Elle admet donc des primitives sur  $[0; a]$  et  $[a; l]$  et par conséquent:  $I_1$  et  $I_2$  existent.

$$\begin{aligned} \text{Dans ces conditions: } I_1 = I_2 &\Leftrightarrow \int_0^a K dx = \int_a^l K dx \\ &\Leftrightarrow [K \cdot x]_0^a = [K \cdot x]_a^l \\ &\Leftrightarrow a \cdot K = K \cdot l - a \cdot K \\ &\Rightarrow a = \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

Au total, si  $f$  est une fonction constante strictement positive:

$$I_1 = I_2 \text{ ssi } a = \frac{l}{2}.$$

1. b. Déterminons la valeur de " a " si, sur  $[0; l]$ ,  $f(x) = x$ :

Ici, il s'agit de déterminer " a " tel que:  $I_1 = I_2$ .

La fonction  $f(x) = x$  est continue sur  $[0; l]$ , donc sur  $[0; a]$  et  $[a; l]$ . Elle admet donc des primitives sur  $[0; a]$  et  $[a; l]$  et par conséquent:  $I_1$  et  $I_2$  existent.

$$\begin{aligned} \text{Dans ces conditions: } I_1 = I_2 &\Leftrightarrow \int_0^a x dx = \int_a^l x dx \\ &\Leftrightarrow \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^a = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_a^l \\ &\Leftrightarrow \frac{a^2}{2} = \frac{l}{2} - \frac{a^2}{2} \\ &\Leftrightarrow a^2 = \frac{l}{2} \\ &\Rightarrow a = \frac{\sqrt{l}}{2}, \text{ car: } a \in [0; l] \end{aligned}$$

Au total, si  $f(x) = x$ :  $A_1 = A_2$  ssi  $a = \frac{\sqrt{l}}{2}$ .

2. a. En unités d'aires, exprimons  $A_1$  et  $A_2$ :

$$\begin{aligned} \text{Comme vu précédemment: } &\bullet A_1 = \int_0^a f(x) dx \\ &\bullet A_2 = \int_a^l f(x) dx. \end{aligned}$$

2. b. b1. Démontrons que si " a " satisfait (E), alors  $F(a) = \frac{F(0) + F(l)}{2}$ .

Si " a " satisfait la condition (E) alors:

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &\Leftrightarrow \int_0^a f(x) dx = \int_a^l f(x) dx. \\ &\Leftrightarrow [F(x)]_0^a = [F(x)]_a^l \\ &\Leftrightarrow F(a) - F(0) = F(l) - F(a) \\ &\Leftrightarrow 2F(a) = F(l) + F(0) \\ &\Leftrightarrow F(a) = \frac{F(l) + F(0)}{2}. \end{aligned}$$

Au total, si " a " satisfait la condition (E) alors nous avons bien:

$$F(a) = \frac{F(1) + F(0)}{2}.$$

## 2. b. b2. La réciproque est-elle vraie ?

Oui la réciproque est vraie car dans la question précédente, tout a été démontré à l'aide d'équivalences.

## 3. a. Déterminons le réel " a " tel que la condition (E) soit remplie avec $f(x) = e^x$ :

Si " a " satisfait la condition (E) alors:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 &\Leftrightarrow \int_0^a f(x) dx = \int_a^1 f(x) dx. \\ &\Leftrightarrow \int_0^a e^x dx = \int_a^1 e^x dx \\ &\Leftrightarrow [e^x]_0^a = [e^x]_a^1 \\ &\Leftrightarrow e^a - 1 = e - e^a \\ &\Leftrightarrow 2e^a = e + 1 \\ &\Leftrightarrow e^a = \frac{e + 1}{2} \\ &\Rightarrow a = \ln\left(\frac{e + 1}{2}\right), \text{ avec: } \frac{e + 1}{2} > 0. \end{aligned}$$

Au total, quand  $f(x) = e^x$ , la condition (E) est remplie avec:

$$a = \ln\left(\frac{e + 1}{2}\right), a \text{ étant unique.}$$

## 3. b. Vérifions que $a = \frac{2}{5}$ quand $f(x) = \frac{1}{(x + 2)^2}$ :

Si " a " satisfait la condition (E) alors:

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow \int_0^a f(x) dx = \int_a^1 f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^a \frac{1}{(x+2)^2} dx = \int_a^1 \frac{1}{(x+2)^2} dx$$

$$\Leftrightarrow \left[ \frac{-1}{x+2} \right]_0^a = \left[ \frac{-1}{x+2} \right]_a^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{a+2} + \frac{1}{2} = \frac{-1}{3} + \frac{1}{a+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{a+2} = \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow 5a + 10 = 12$$

$$\Rightarrow a = \frac{2}{5}$$

Au total, nous avons bien:  $a = \frac{2}{5}$ .




---



---

# freemaths.fr

---



---

## EXERCICE 2

[ Centres Étrangers 2016 ]

Partie B: Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de " a "

1. Démontrons que si  $a$  est un réel satisfaisant (E), alors  $a$  est solution de l'équation  $x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$ :

D'après l'énoncé:

- $a \in \mathbb{R}$  et vérifie la condition (E),
- (E): " les aires  $A_1$  et  $A_2$  sont égales ",
- $a$  est tel que:  $F(a) = \frac{F(0) + F(1)}{2}$  ( $F =$  primitive de  $f$ ),
- pour tout réel  $x \in [0; 1]$ ,  $f(x) = 4 - 3x^2$ .

Sur  $[0; 1]$ , la fonction  $f$  admet comme primitive la fonction  $F$ , avec: pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $F(x) = 4x - x^3$ .

Dans ces conditions:  $F(0) = 0$  et  $F(1) = 4 - 1 \Rightarrow F(1) = 3$ .

$$\text{D'où: } \frac{F(0) + F(1)}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Or } a \text{ est tel que: } F(a) = \frac{F(0) + F(1)}{2} \Rightarrow F(a) = \frac{3}{2}.$$

$$F(a) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4a - a^3 = \frac{3}{2} \quad (\text{car } F(x) = 4x - x^3)$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{a^3}{4} + \frac{3}{8}.$$

Ainsi, nous pouvons affirmer que si  $a$  est un réel satisfaisant la condition (E), alors  $a$  est solution de l'équation:  $x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$ .

## 2. a. Calculons $U_j$ :

D'après l'énoncé:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ pour tout } x \in [0; 1], g(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}, \\ \bullet U_0 = 0 \text{ et } U_{n+1} = g(U_n). \end{array} \right.$$

$$\text{Ainsi: } U_1 = g(U_0) \Leftrightarrow U_1 = g(0) \Rightarrow U_1 = \frac{3}{8}.$$

$$\text{D'où: } U_1 = \frac{3}{8}.$$

## 2. b. Démontrons que $g$ est croissante sur $[0; 1]$ :

Pour cela, nous devons calculer la dérivée de  $g$  sur  $[0; 1]$ .

Or  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction polynôme.

Donc  $g$  est dérivable sur  $[0; 1]$  et nous avons:  $g'(x) = \frac{3}{4} x^2$ .

Or pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $g'(x) \geq 0$ .

Donc nous pouvons affirmer que sur  $[0; 1]$ :  $g$  est croissante.

## 2. c. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ ,

$$\text{on a } 0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 1:$$

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

$$\text{" pour tout entier naturel } n: 0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 1 \text{ "}$$

Initialisation:  $\bullet 0 \leq U_0 \leq U_1 \leq 1$  ?

$$\text{oui car nous avons bien: } 0 \leq 0 \leq \frac{3}{8} \leq 1.$$

Donc vrai au rang " 0 ".

$$\bullet 0 \leq U_1 \leq U_2 \leq 1 ?$$

$$\text{oui car nous avons bien: } 0 \leq \frac{3}{8} \leq 0,388 \leq 1.$$

$\hookrightarrow U_2$

Donc vrai au rang "1".

**Hérédité:** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons  $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 1$   
et montrons qu'alors:  $0 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 1$ .

**Supposons:**  $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 1$ , pour un entier naturel  $n$  fixé.  
(1)

Comme  $g$  est croissante sur  $[0;1]$ , nous pouvons écrire:

$$(1) \Rightarrow g(0) \leq g(U_n) \leq g(U_{n+1}) \leq g(1)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{8} \leq g(U_n) \leq g(U_{n+1}) \leq \frac{1}{4} + \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{8} \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{3}{8} \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq \frac{5}{8} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 1.$$

**Conclusion:** Pour tout entier naturel  $n$ , nous avons:  $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 1$ .

**2. d. Montrons que la suite  $(U_n)$  est convergente et converge vers  $a$ :**

Nous savons que:

$$\bullet 0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 1 \text{ cad } U_{n+1} - U_n \geq 0.$$

Donc  $(U_n)$  est croissante.

$$\bullet 0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 1 \quad \text{cad} \quad 0 \leq U_n \leq 1.$$

Donc  $(U_n)$  est majorée par  $M = 1$ .

Dans ces conditions,  $(U_n)$  étant croissante et majorée, elle est convergente.

Soit " $L$ " la limite de la suite  $(U_n)$ .

" $L$ " est unique et est telle que:  $g(L) = L$ .

$$g(L) = L \Leftrightarrow \frac{L^3}{4} + \frac{3}{8} = L.$$

Or, d'après la question 1, l'équation  $\frac{L^3}{4} + \frac{3}{8} = L$  admet une solution unique dans l'intervalle  $[0; 1]$ : " $a$ ".

En définitive, la suite  $(U_n)$  est convergente et converge vers:  $L = a$ .

**2. e. Calculons  $U_{10}$  à  $10^{-8}$  près:**

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons:  $U_{10} = 0,38980784$ .