Corrigé

Exercice 4

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

SÉRIE S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 7

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de la page 1/8 à la page 8/8.

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire
n° 99-186 du 16 novembre 1999.

--*-*

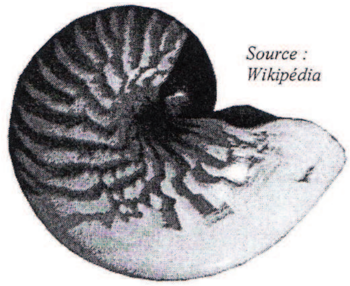
Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 4 (5 points)

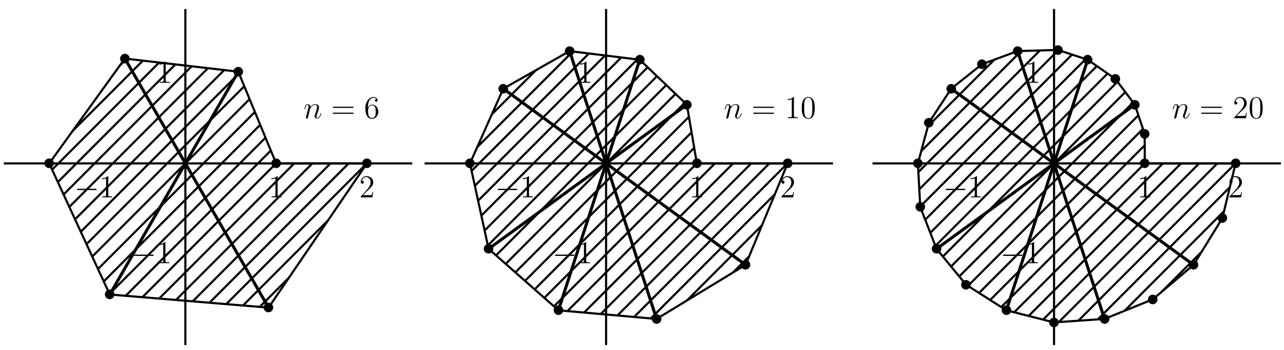
(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On veut modéliser dans le plan la coquille d'un nautile à l'aide d'une ligne brisée en forme de spirale. On s'intéresse à l'aire délimitée par cette ligne.



On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier k allant de 0 à n, on définit les nombres complexes $z_k = \left(1 + \dfrac{k}{n}\right) e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ et on note M_k le point d'affixe z_k.

Dans ce modèle, le pourtour du nautile est la ligne brisée reliant tous les points M_k avec $0 \leqslant k \leqslant n$.
Par exemple, pour les entiers $n = 6$, $n = 10$ et $n = 20$, on obtient les figures ci-dessous.



Partie A - Ligne brisée formée à partir de sept points

Dans cette partie, on suppose que $n = 6$. Ainsi, pour $0 \leqslant k \leqslant 6$, on a $z_k = \left(1 + \dfrac{k}{6}\right) e^{i\frac{2k\pi}{6}}$.

1) Déterminer la forme algébrique de z_1.

2) Vérifier que z_0 et z_6 sont des entiers que l'on déterminera.

3) Calculer la longueur de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1 puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\dfrac{7\sqrt{3}}{24}$.

Partie B - Ligne brisée formée à partir de $n+1$ points

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2.

1) Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, déterminer la longueur OM_k.

2) Pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, déterminer une mesure des angles $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_k}\right)$ et $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$.
En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM_k}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$.

3) Pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, démontrer que la longueur de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1} est égale à $\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right) \times \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

4) On admet que l'aire du triangle OM_kM_{k+1} est égale à $a_k = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \times \left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$
et que l'aire totale délimitée par la ligne brisée est égale à $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$.
L'algorithme suivant permet de calculer l'aire A_n lorsqu'on entre l'entier n :

VARIABLES : A est un nombre réel
k est un entier
n est un entier
TRAITEMENT : Lire la valeur de n
A prend la valeur 0
Pour k allant de 0 à n-1
A prend la valeur $A + \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \times \left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$
Fin Pour
SORTIE : Afficher A

On entre dans l'algorithme $n = 10$
Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui illustre le fonctionnement de l'algorithme.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	10705	2,322	3,027	3,826	4,726		

5) On admet que $A_2 = 0$ et que la suite (A_n) converge et que $\lim_{n\to+\infty} A_n = \dfrac{7\pi}{3} \approx 7,3$.
Recopier et compléter les lignes $L6$ et $L13$ de l'algorithme ci-après qui permet de déterminer le plus petit entier n tel que $A_n \geqslant 7,2$. On ne demande pas de déterminer n.

$L1$ VARIABLES : A est un nombre réel
$L2$ k est un entier
$L3$ n est un entier
$L4$ TRAITEMENT : n prend la valeur 2
$L5$ A prend la valeur 0
L6 **Tant que**…………
$L7$ n prend la valeur $n+1$
$L8$ A prend la valeur 0
$L9$ Pour k allant de 0 à $n-1$
$L10$ A prend la valeur $A + \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \times \left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$
Fin Pour
$L12$ Fin Tant que
L13 **SORTIE :** **Afficher** …

EXERCICE 4 (Centres Etrangers 2016)

Partie A : Ligne brisée formée à partir de 7 points

① Déterminons la forme algébrique de z_1 :

Ici : $n=6$ et pour tout $k \in [0;6]$, $z_k = \left(1+\frac{k}{6}\right)e^{i\frac{2k\pi}{6}}$.

D'où : $z_1 = \left(1+\frac{1}{6}\right)e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow z_1 = \frac{7}{6}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Ainsi, nous pouvons écrire : $z_1 = \frac{7}{6}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow z_1 = \frac{7}{6}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{7}{12} + \left(\frac{7\sqrt{3}}{12}\right)i.$$

Au total, sous forme algébrique : $z_1 = \frac{7}{12} + \left(\frac{7\sqrt{3}}{12}\right)i$.

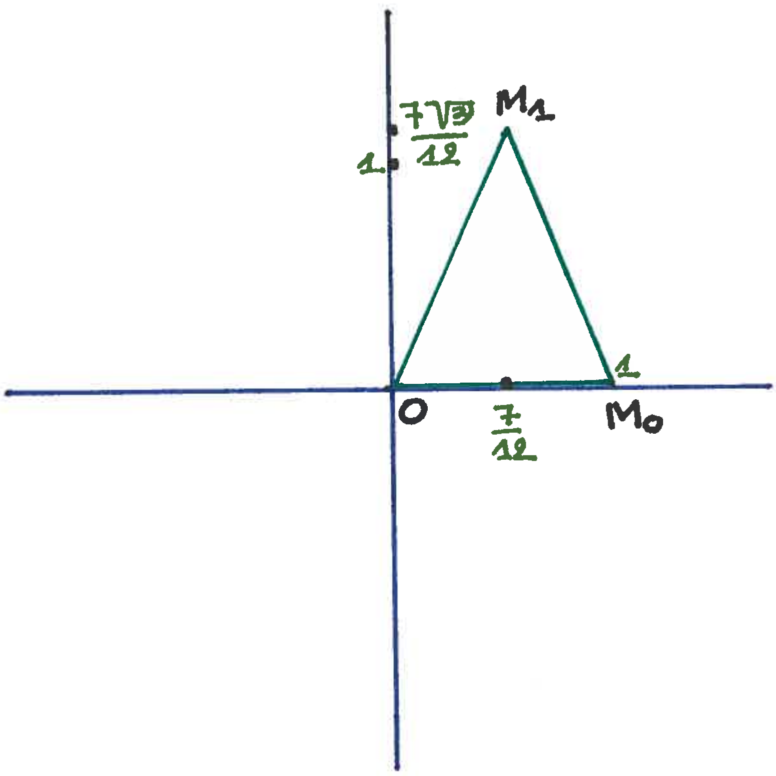
② Vérifions que z_0 et z_6 sont des entiers que l'on déterminera :

- $z_0 = \left(1+\frac{0}{6}\right)e^{i\frac{2\times 0\times\pi}{6}} \Rightarrow z_0 = 1$.
- $z_6 = \left(1+\frac{6}{6}\right)e^{i\frac{2\times 6\times\pi}{6}} \Rightarrow z_6 = 2$ ($\cos 2\pi = 1$ et $\sin 2\pi = 0$).

Au total, z_0 et z_6 sont bien des entiers avec : $z_0 = 1$ et $z_6 = 2$.

③ ⓐ Calculons la longueur de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1 :

Etape 1 : Représentation graphique du triangle OM_0M_1.



Etape 2 : Réponse à la question posée.

Grâce au graphique, nous pouvons dire que la hauteur, issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1, a pour longueur la partie imaginaire de M_1 (z_1) cad : $H = \frac{7\sqrt{3}}{12}$.

Au total : $H = \frac{7\sqrt{3}}{12}$.

ⓑ Etablissons que l'aire du triangle $OM_0M_1 = 7\sqrt{3}/24$:

L'aire d'un triangle est : $\mathcal{A} = \frac{\text{Base du triangle} \times \text{Hauteur}}{2}$.

Ici, nous avons donc : $\mathcal{A} = \frac{1 \times (7\sqrt{3}/12)}{2} \Rightarrow \mathcal{A} = 7\sqrt{3}/24$.

Au total : $\mathcal{A} = 7\sqrt{3}/24$.

Partie B : Ligne brisée formée à partir de $(n+1)$ points

① Déterminons la longueur OM_k :

La longueur OM_k est : $|z_k - 0|$, avec $M_k(z_k)$ et $O(0)$.

Or : $z_k = \left(1 + \frac{k}{n}\right) e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

Dans ces conditions : $|z_k| = 1 + \frac{k}{n}$, avec $n \geqslant 2$ et $0 \leqslant k \leqslant n$.

Au total, la longueur OM_k est : $1 + \frac{k}{n}$.

②ⓐ Déterminons une mesure de l'angle $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM_k})$:

Une mesure de l'angle $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM_k})$ est : $\arg(z_k)$.

Or : $\arg(z_k) = \frac{2k\pi}{n}$.

Au total, une mesure de l'angle $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM_k})$ est :

$\frac{2k\pi}{n}$, avec : $n \geqslant 2$ et $0 \leqslant k \leqslant n$.

ⓑ Déterminons une mesure de l'angle $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM_{k+1}})$:

Une mesure de l'angle $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM_{k+1}})$ est : $\arg(z_{k+1})$.

Or : $z_{k+1} = \left(1 + \frac{(k+1)}{n}\right) e^{i\frac{2(k+1)\pi}{n}}$.

D'où : $\arg(z_{k+1}) = \frac{2(k+1)\pi}{n}$.

Au total, une mesure de l'angle $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM_{k+1}})$ est :

$\frac{2(k+1)\pi}{n}$, avec : $n \geqslant 2$ et $0 \leqslant k \leqslant n$.

ⓒ Déduisons-en une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_k} ; \overrightarrow{OM_{k+1}})$:

Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_k} ; \overrightarrow{OM_{k+1}})$ est :

$$(\vec{u} ; \overrightarrow{OM_{k+1}}) - (\vec{u} ; \overrightarrow{OM_k}) \; [2\pi].$$

D'où : $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM_{k+1}}) - (\vec{u} ; \overrightarrow{OM_k}) = \dfrac{2(k+1)\pi}{n} - \dfrac{2k\pi}{n} \; [2\pi]$

cad : $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM_{k+1}}) - (\vec{u} ; \overrightarrow{OM_k}) = \dfrac{2\pi}{n} \; [2\pi]$.

Au total, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_k} ; \overrightarrow{OM_{k+1}})$ est : $\dfrac{2\pi}{n} \; [2\pi]$.

③ Démontrons que la longueur de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1} est $\left(1+\left(\dfrac{k+1}{n}\right)\right)\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$:

Soit H_{k+1} le pied de la hauteur de longueur h_{k+1} issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1}.

Dans ces conditions, $OH_{k+1}M_{k+1}$ est un triangle rectangle en H_{k+1}.

Ainsi : $\dfrac{H_{k+1}M_{k+1}}{OM_{k+1}} = \sin\left(\overrightarrow{OH_{k+1}} ; \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$

$\iff \dfrac{H_{k+1}M_{k+1}}{OM_{k+1}} = \dfrac{h_{k+1}}{OM_{k+1}} = \sin\left(\overrightarrow{OH_{k+1}} ; \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$. (a)

or, nous savons que :

- $(\overrightarrow{OH_{k+1}} ; \overrightarrow{OM_{k+1}}) = (\overrightarrow{OM_k} ; \overrightarrow{OM_{k+1}})$
  $= \dfrac{2\pi}{n} \; [2\pi]$;

- $OM_{k+1} = 1 + \dfrac{(k+1)}{n}$.

D'où : (a) $\Rightarrow h_{k+1} = OM_{k+1} \times \sin\left(\overrightarrow{OH_{k+1}} ; \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$

$$\Rightarrow h_{k+1} = OM_{k+1} \times \sin\left(\overrightarrow{OM_k} ; \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$$

$$\Rightarrow h_{k+1} = \left[1 + \left(\frac{k+1}{n}\right)\right] \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Au total, on a bien : $h_{k+1} = \left[1 + \left(\frac{k+1}{n}\right)\right] \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

④ Recopions et complétons le tableau :

Le tableau recopié et complété qui illustre le fonctionnement de l'algorithme est le suivant :

k	8	9
A	5,731	6,848

⑤ Recopions et complétons les lignes L6 et L13 :

Les lignes L6 et L13 qui permettent de déterminer le plus petit entier n tel que $A_n \geqslant 7,2$ sont :

L6 Tant que $A < 7,2$

L13 Afficher n