Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

SÉRIE S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 7

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de la page 1/8 à la page 8/8.

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire
n° 99-186 du 16 novembre 1999.

--*-*

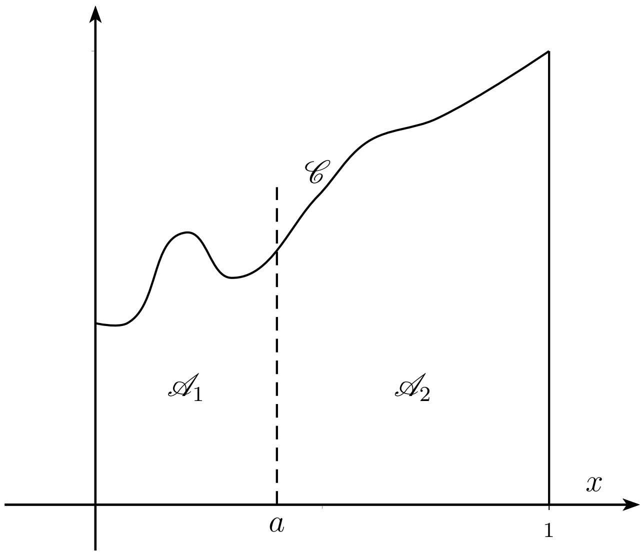
Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 2 (6 points)

(commun à tous les candidats)

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, continue et positive sur cet intervalle, et a une réel tel que $0 < a < 1$.
On note :
- $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal ;
- $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part, les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$ d'autre part.
- $\mathscr{A}_2$ l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part, les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$ d'autre part.



Le but de cet exercice est de déterminer, pour différentes fonctions f, une valeur du réel a vérifiant la condition (E) : « les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales ».
On admet l'existence d'un tel réel a pour chacune des fonctions considérées.

Partie A - Étude de quelques exemples

1) Vérifier que dans les cas suivants, la condition (E) est remplie pour un unique réel a et déterminer sa valeur.

a) f est une fonction constante strictement positive.

b) f est définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = x$.

2) a) À l'aide d'intégrales, exprimer, en unités d'aires, les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$.

b) On note F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
Démontrer que si le réel a satisfait la condition (E), alors $F(a) = \dfrac{F(0) + F(1)}{2}$.
La réciproque est-elle vraie ?

3) Dans cette question, on envisage deux autres fonctions particulières.

a) La fonction f est définie pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = e^x$.
Vérifier que la condition (E) est remplie pour un unique réel a et donner sa valeur.

b) La fonction f définie pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$.
Vérifier que la valeur $a = \dfrac{2}{5}$ convient.

Partie B - Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de a

Dans cette partie, on considère la fonction f définie pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = 4 - 3x^2$.
1) Démontrer que si a est un réel satisfaisant la condition (E), alors a est solution de l'équation :

$$x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}.$$

Dans la suite de l'exercice, on admettra que cette équation a une unique solution dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. On note a cette solution.

2) On considère la fonction g définie pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$ par $g(x) = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$ et la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g\left(u_n\right)$.

a) Calculer u_1.

b) Démontrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

d) Prouver que la suite (u_n) est convergente.
À l'aide des opérations sur les limites, prouver que la limite est a.

e) On admet que le réel a vérifie l'inégalité $0 < a - u_{10} < 10^{-9}$. Calculer u_{10} à 10^{-8} près.

EXERCICE 2

[Centres Étrangers 2016]

Partie A : Étude de quelques exemples

1. a. Déterminons la valeur de " a " si f est une fonction constante strictement positive :

Si f est une fonction constante strictement positive, nous pouvons alors écrire, pour tout $x \in [0;1]$: $f(x) = K$, avec $K > 0$.

Ici, il s'agit de déterminer " a " tel que : $I_1 = I_2$, avec : $I_1 = \int_0^a f(x)dx$

et : $I_2 = \int_a^1 f(x)dx$.

f est continue sur $[0;1]$, donc sur $[0;a]$ et $[a;1]$. Elle admet donc des primitives sur $[0;a]$ et $[a;1]$ et par conséquent : I_1 et I_2 existent.

Dans ces conditions : $I_1 = I_2 \iff \int_0^a K dx = \int_a^1 K dx$

$\iff [K.x]_0^a = [K.x]_a^1$

$\iff a.K = K - a.K$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Au total, si f est une fonction constante strictement positive :

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \quad \text{ssi} \quad a = \frac{1}{2}.$$

1. b. Déterminons la valeur de " a " si, sur $[0;1]$, $f(x) = x$:

Ici, il s'agit de déterminer " a " tel que : $I_1 = I_2$.

La fonction $f(x) = x$ est continue sur $[0;1]$, donc sur $[0;a]$ et $[a;1]$. Elle admet donc des primitives sur $[0;a]$ et $[a;1]$ et par conséquent: I_1 et I_2 existent.

Dans ces conditions: $I_1 = I_2 \iff \int_0^a x\,dx = \int_a^1 x\,dx$

$$\iff \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^1$$

$$\iff \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$\iff a^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{car: } a \in [0;1]$$

Au total, si $f(x) = x$: $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ ssi $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. a. En unités d'aires, exprimons $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$:

Comme vu précédemment:

- $\mathcal{A}_1 = \int_0^a f(x)dx$
- $\mathcal{A}_2 = \int_a^1 f(x)dx$.

2. b. b1. Démontrons que si " a " satisfait (E), alors $F(a) = \frac{F(0) + F(1)}{2}$:

Si " a " satisfait la condition (E) alors:

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \iff \int_0^a f(x)dx = \int_a^1 f(x)dx.$$

$$\iff [F(x)]_0^a = [F(x)]_a^1$$

$$\iff F(a) - F(0) = F(1) - F(a)$$

$$\iff 2F(a) = F(1) + F(0)$$

$$\iff F(a) = \frac{F(1) + F(0)}{2}.$$

Au total, si " a " satisfait la condition (E) alors nous avons bien:

$$F(a) = \frac{F(1) + F(0)}{2}.$$

2. b. b2. La réciproque est-elle vraie ?

Oui la réciproque est vraie car dans la question précédente, tout a été démontré à l'aide d'équivalences.

3. a. Déterminons le réel " a " tel que la condition (E) soit remplie avec $f(x) = e^x$:

Si " a " satisfait la condition (E) alors:

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \iff \int_0^a f(x)dx = \int_a^1 f(x)dx.$$

$$\iff \int_0^a e^x dx = \int_a^1 e^x dx$$

$$\iff [e^x]_0^a = [e^x]_a^1$$

$$\iff e^a - 1 = e - e^a$$

$$\iff 2e^a = e + 1$$

$$\iff e^a = \frac{e+1}{2}$$

$$\Rightarrow a = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right), \quad \text{avec: } \frac{e+1}{2} > 0.$$

Au total, quand $f(x) = e^x$, la condition (E) est remplie avec:

$$a = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right), \text{ a étant unique.}$$

3. b. Vérifions que $a = \frac{2}{5}$ quand $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$:

Si " a " satisfait la condition (E) alors:

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \iff \int_0^a f(x)dx = \int_a^1 f(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^a \frac{1}{(x+2)^2}dx = \int_a^1 \frac{1}{(x+2)^2}dx$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{-1}{x+2}\right]_0^a = \left[\frac{-1}{x+2}\right]_a^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{a+2} + \frac{1}{2} = \frac{-1}{3} + \frac{1}{a+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{a+2} = \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow 5a + 10 = 12$$

$$\Rightarrow a = \frac{2}{5}.$$

Au total, nous avons bien: $a = \frac{2}{5}.$

EXERCICE 2

[Centres Étrangers 2016]

Partie B: Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de " a "

1. Démontrons que si a est un réel satisfaisant (E), alors a est solution de l'équation $x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$:

D'après l'énoncé:

- $a \in \mathbb{R}$ et vérifie la condition (E),
- (E): " les aires A_1 et A_2 sont égales ",
- a est tel que: $F(a) = \frac{F(0) + F(1)}{2}$ (F = primitive de f),
- pour tout réel $x \in [0; 1]$, $f(x) = 4 - 3x^2$.

Sur [0; 1], la fonction f admet comme primitive la fonction F,

avec: pour tout $x \in [0; 1]$, $F(x) = 4x - x^3$.

Dans ces conditions: $F(0) = 0$ et $F(1) = 4 - 1$ => $F(1) = 3$.

D'où: $\frac{F(0) + F(1)}{2} = \frac{3}{2}$.

Or a est tel que: $F(a) = \frac{F(0) + F(1)}{2}$ => $F(a) = \frac{3}{2}$.

$F(a) = \frac{3}{2}$ <=> $4a - a^3 = \frac{3}{2}$ (car $F(x) = 4x - x^3$)

<=> $a = \frac{a^3}{4} + \frac{3}{8}$.

Ainsi, nous pouvons affirmer que si a est un réel satisfaisant la condition (E), alors a est solution de l'équation: $x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$.

2. a. Calculons U_1:

D'après l'énoncé:

$$\begin{cases} \bullet \text{ pour tout } x \in [0;1],\ g(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}, \\ \bullet\ U_0 = 0 \text{ et } U_{n+1} = g(U_n). \end{cases}$$

Ainsi: $U_1 = g(U_0)$ <=> $U_1 = g(0)$ => $U_1 = \frac{3}{8}$.

D'où: $U_1 = \frac{3}{8}$.

2. b. Démontrons que g est croissante sur [0; 1]:

Pour cela, nous devons calculer la dérivée de g sur [0; 1].

Or g est dérivable sur IR comme fonction polynôme.

Donc g est dérivable sur [0; 1] et nous avons: $g'(x) = \frac{3}{4}x^2$.

Or pour tout $x \in [0;1]$, $g'(x) \geqslant 0$.

Donc nous pouvons affirmer que sur [0; 1]: g est croissante.

2. c. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$:

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$ ".

Initialisation: • $0 \leqslant U_0 \leqslant U_1 \leqslant 1$?

oui car nous avons bien: $0 \leqslant 0 \leqslant \frac{3}{8} \leqslant 1$.

Donc vrai au rang " 0 ".

- $0 \leqslant U_1 \leqslant U_2 \leqslant 1$?

oui car nous avons bien: $0 \leqslant \frac{3}{8} \leqslant \underbrace{0,388}_{U_2} \leqslant 1.$

Donc vrai au rang "1".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$
et montrons qu'alors: $0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 1.$

Supposons: $\underbrace{0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1}_{(1)}$, pour un entier naturel n fixé.

Comme g est croissante sur [0 ; 1], nous pouvons écrire:

$$(1) \Rightarrow g(0) \leqslant g(U_n) \leqslant g(U_{n+1}) \leqslant g(1)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{8} \leqslant g(U_n) \leqslant g(U_{n+1}) \leqslant \frac{1}{4} + \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{8} \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \frac{3}{8} \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant \frac{5}{8} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 1.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, nous avons: $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1.$

2. d. Montrons que la suite (U_n) est convergente et converge vers a:

Nous savons que:

- $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$ cad $U_{n+1} - U_n \geqslant 0.$

Donc (U_n) est croissante.

• $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$ cad $0 \leqslant U_n \leqslant 1$.

Donc (U_n) est majorée par $M = 1$.

Dans ces conditions, (U_n) étant croissante et majorée, elle est convergente.

Soit " L " la limite de la suite (U_n).

" L " est unique et est telle que: $g(L) = L$.

$g(L) = L \iff \dfrac{L^3}{4} + \dfrac{3}{8} = L$.

Or, d'après la question 1., l'équation $\dfrac{L^3}{4} + \dfrac{3}{8} = L$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0\,;1]$: " a ".

En définitive, la suite (U_n) est convergente et converge vers: $L = a$.

2. e. Calculons U_{10} à 10^{-8} près:

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons: $U_{10} = 0,38980784$.