EXERCICE 1

[Centres Étrangers 2016]

1. Affirmation 1: **" La probabilité que la masse de la baguette soit supérieure à 187 g est supérieure à 0, 9 ".**

C'est vrai.

Justifions le.

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X est la variable aléatoire qui correspond à la masse d'une baguette de pain prélevée au hasard dans la production (en gramme).
- X suit une loi normale d'espérance $\mu = 200$ et d'écart type $\sigma = 10$.
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de calculer: $P\,(X \geqslant 187)$.

$$P\,(X \geqslant 187) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geqslant \frac{187 - 200}{10}\right)$$

$$= P\,(T \geqslant -1,3)$$

$$= P\,(T \leqslant 1,3).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $P\,(X \geqslant 187) \approx 90,3\%$.

Au total, la probabilité que la masse de la baguette soit supérieure à 187 g est d'environ: $90,3\%$ et $90,3\% = 0,903 > 0,9$.

2. Affirmation 2 : " L'équation $x - \cos x = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ ".

C'est vrai.

Justifions le.

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$.

Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a ; b]$ tel que : $f(c) = K$.

Cela signifie que : l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a ; b]$.

- Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a ; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a ; b]$.

Soit : $f(x) = x - \cos x$, pour tout $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ici : • f est continue sur $[a ; b] = \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$

• " $k = 0$ " est compris entre : $f(0) = -1 < 0$

et : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$.

$$\left(f(0) = f(a) = 0 - 1 \text{ et } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(b) = \frac{\pi}{2} - 0\right)$$

• f est dérivable sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

• Pour tout $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$: $f'(x) = 1 - \sin x$.

• f est strictement croissante sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

En effet, pour tout $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$: $f'(x) > 0$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 0$ $(k = 0)$ admet une unique solution appartenant à $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Au total: l'équation $x - \cos x = 0$ ou $f(x) = 0$ admet exactement une unique solution sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

3. Affirmation 3: " Les droites D_1 et D_2 sont sécantes ".

C'est faux.

Justifions le.

D'après le cours, nous savons que:

• Soit $A\,(x_A\,;y_A\,;z_A)$ un point de l'espace.

• Soit $\vec{u}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ un vecteur non nul de l'espace.

• La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t\,.\,a \\ y = y_A + t\,.\,b \\ z = z_A + t\,.\,c \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ici: • la droite D_1 passe par le point A (1 ; 2 ; 0) et a pour vecteur directeur $\vec{u}$ (2 ; - 3 ; 4) ;

• la droite D_2 passe par le point A' (3 ; 0 ; 4) et a pour vecteur directeur $\vec{u}$' (- 5 ; 2 ; 1).

Soit C un point de D_1, avec: C (1 + 2t ; 2 - 3t ; 4t).

Soit D un point de D_2, avec: D (3 - 5t' ; 2t' ; 4 + t').

Les droites D_1 et D_2 sont sécantes ssi leur point d'intersection vérifie le système:

$$\begin{cases} 1 + 2t = 3 - 5t' \\ 2 - 3t = 2t' \\ 4t = 4 + t' \end{cases} \iff \begin{cases} 2t + 5t' = 2 & (1) \\ 3t + 2t' = 2 & (2). \\ t' = 4t - 4 \end{cases}$$

En remplaçant t' par " 4t - 4 " dans les équations (1) et (2), nous avons:

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \iff \begin{cases} 2t + 5(4t - 4) = 2 \\ 3t + 2(4t - 4) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{10}{11} \end{cases}.$$

Or: $1 \neq \frac{10}{11}$, donc le système est impossible.

Au total: D_1 et D_2 ne sont pas sécantes.

4. Affirmation 4: " D_1 est parallèle au plan d'équation $x + 2y + z - 3 = 0$ ".

C'est vrai.

Justifions le.

D'après le cours, nous savons que:

- **Soit A $(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ un point de l'espace.**
- **Soit $\vec{n}$ $(a\,;\,b\,;\,c)$ un vecteur (l'un des 3 réels a, b ou c n'étant pas nul).**
- **Une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est:**

$$a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) + c\,(z - z_A) = 0.$$

Ici:
- l'équation cartésienne du plan est $x + 2y + z - 3 = 0$;
- donc le vecteur normal est $\vec{n}$ $(1\,;\,2\,;\,1)$;
- la droite D_1 a pour vecteur directeur $\vec{u}$ $(2\,;\,-3\,;\,4)$.

Or: $\vec{u}\,.\,\vec{n} = (2 \times 1) + (-3 \times 2) + (4 \times 1) \Rightarrow \vec{u}\,.\,\vec{n} = 0.$

Et donc: $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Au total: comme $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, nous pouvons affirmer, d'après le cours, que D_1 et le plan P sont parallèles.