Corrigé

Exercice 1

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

SÉRIE S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 7

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de la page 1/8 à la page 8/8.

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire
n° 99-186 du 16 novembre 1999.

--*-*

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1) Dans une boulangerie industrielle, on prélève au hasard une baguette de pain dans la production. On admet que la variable aléatoire exprimant sa masse, en gramme, suit la loi normale d'espérance 200 et d'écart-type 10.

Affirmation 1
La probabilité que la masse de la baguette soit supérieure à 187 g est supérieure à $0,9$.

2) Affirmation 2
L'équation $x - \cos x = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Dans les questions 3. et 4., l'espace est rapporté à un repère orthonormal et l'on considère les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ qui admettent pour représentations paramétriques respectives :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 4t \end{array}\right. ,\ t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{l} x = -5t' + 3 \\ y = 2t' \\ z = t' + 4 \end{array}\right. ,\ t' \in \mathbb{R}.$$

3) Affirmation 3
Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes.

4) Affirmation 4
La droite $\mathscr{D}_1$ est parallèle au plan d'équation $x + 2y + z - 3 = 0$.

EXERCICE 1

[Centres Étrangers 2016]

1. Affirmation 1: **" La probabilité que la masse de la baguette soit supérieure à 187g est supérieure à 0, 9 ".**

C'est vrai.

Justifions le.

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X est la variable aléatoire qui correspond à la masse d'une baguette de pain prélevée au hasard dans la production (en gramme).
- X suit une loi normale d'espérance $\mu = 200$ et d'écart type $\sigma = 10$.
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de calculer: $P(X \geqslant 187)$.

$$P(X \geqslant 187) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geqslant \frac{187 - 200}{10}\right)$$

$$= P(T \geqslant -1,3)$$

$$= P(T \leqslant 1,3).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $P(X \geqslant 187) \approx 90,3\%$.

Au total, la probabilité que la masse de la baguette soit supérieure à 187g est d'environ: $90,3\%$ et $90,3\% = 0,903 > 0,9$.

2. Affirmation 2: " L'équation $x - \cos x = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ ".

C'est vrai.

Justifions le.

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$.

 Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a\,;b]$ tel que: $f(c) = K$.

 Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a\,;b]$.

- Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a\,;b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a\,;b]$.

Soit: $f(x) = x - \cos x$, pour tout $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Ici: • f est continue sur $[a\,;b] = \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$

• " $k = 0$ " est compris entre: $f(0) = -1 < 0$

et: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$.

$$\left(f(0) = f(a) = 0 - 1 \text{ et } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(b) = \frac{\pi}{2} - 0\right)$$

- f est dérivable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

- Pour tout $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$: $f'(x) = 1 - \sin x$.

- f est strictement croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

  En effet, pour tout $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$: $f'(x) > 0$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = 0$ $(k = 0)$ admet une unique solution appartenant à $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Au total : l'équation $x - \cos x = 0$ ou $f(x) = 0$ admet exactement une unique solution sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

3. Affirmation 3 : " Les droites D_1 et D_2 sont sécantes ".

C'est faux.

Justifions le.

D'après le cours, nous savons que :

- Soit A $(x_A\,; y_A\,; z_A)$ un point de l'espace.

- Soit $\vec{u}$ $(a\,;\ b\,;\ c)$ un vecteur non nul de l'espace.

- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_A + t\,.\,a \\ y = y_A + t\,.\,b \\ z = z_A + t\,.\,c \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}.$$

Ici: • la droite D_1 passe par le point A (1 ; 2 ; 0) et a pour vecteur directeur $\vec{u}$ (2 ; - 3 ; 4) ;

• la droite D_2 passe par le point A' (3 ; 0 ; 4) et a pour vecteur directeur $\vec{u}'$ (- 5 ; 2 ; 1).

Soit C un point de D_1, avec: C (1 + 2t ; 2 - 3t ; 4t).

Soit D un point de D_2, avec: D (3 - 5t' ; 2t' ; 4 + t').

Les droites D_1 et D_2 sont sécantes ssi leur point d'intersection vérifie le système:

$$\begin{cases} 1 + 2t = 3 - 5t' \\ 2 - 3t = 2t' \\ 4t = 4 + t' \end{cases} \iff \begin{cases} 2t + 5t' = 2 & (1) \\ 3t + 2t' = 2 & (2). \\ t' = 4t - 4 \end{cases}$$

En remplaçant t' par " 4t - 4 " dans les équations (1) et (2), nous avons:

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \iff \begin{cases} 2t + 5(4t - 4) = 2 \\ 3t + 2(4t - 4) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{10}{11} \end{cases}.$$

Or: $1 \neq \frac{10}{11}$, donc le système est impossible.

Au total: D_1 et D_2 ne sont pas sécantes.

4. Affirmation 4: " D_1 est parallèle au plan d'équation $x + 2y + z - 3 = 0$ ".

C'est vrai.

Justifions le.

D'après le cours, nous savons que:

- **Soit A (x_A ; y_A ; z_A) un point de l'espace.**
- **Soit $\vec{n}$ (a ; b ; c) un vecteur (l'un des 3 réels a, b ou c n'étant pas nul).**
- **Une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est:**

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Ici:
- l'équation cartésienne du plan est $x + 2y + z - 3 = 0$;
- donc le vecteur normal est $\vec{n}$ (1 ; 2 ; 1) ;
- la droite D_1 a pour vecteur directeur $\vec{u}$ (2 ; - 3 ; 4).

Or: $\vec{u} \cdot \vec{n} = (2 \times 1) + (-3 \times 2) + (4 \times 1) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0.$

Et donc: $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Au total: comme $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, nous pouvons affirmer, d'après le cours, que D_1 et le plan P sont parallèles.