EXERCICE 3

[Centres Étrangers 2015]

1. a. a1. Calculons g':

Ici, pour tout réel x: $g(x) = e^{2x} - e^x - x$.

Posons: $g = u + v + w$,

avec: $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $u(x) = e^{2x}$, $v(x) = -e^x$ et $w(x) = -x$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme fonctions " exponentielle ".

De plus, la fonction w est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

Par conséquent, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de 3 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$: $u + v + w$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer g' sur $\mathbb{R}$.

$\forall\ x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1$.

Au total: $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1$.

1. a. a2. Montrons que $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$:

Nous savons que: $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1$.

Or: $(e^x - 1)(2e^x + 1) = 2e^{2x} + e^x - 2e^x - 1$

cad: $(e^x - 1)(2e^x + 1) = 2e^{2x} - e^x - 1$.

Au total, nous avons bien: $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.

1. b. Tableau de variation de g + " son minimum ":

- Pour déterminer le minimum de g, résolvons l'équation: $g'(x) = 0$.

$g'(x) = 0 \iff 2e^x - e^x - 1 = 0$

$\iff (e^x - 1)(2e^x + 1) = 0$

$\iff (e^x - 1) = 0$ et/ou $(2e^x + 1) = 0$. (1)

$\forall\ x \in \mathbb{R}$: $e^x > 0 \Rightarrow 2e^x > 0 \Rightarrow 2e^x + 1 > 1$.

D'où: $g'(x) = 0 \iff e^x - 1 = 0 \iff e^x = e^0 \Rightarrow x^* = 0$.

Le minimum de g est donc le point A, avec: $A(0, g(0))$ cad $A(0, 0)$.

- D'où le tableau de variation de g:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

1. c. Etudions le sens de variation de la suite (U_n):

Soit: $g(U_n) = U_{n+1} - U_n$.

Ici, n est un entier naturel.

Or, sur $\mathbb{N}$: $g(U_n) \geqslant 0$ (tableau de variation précédent).

D'où, pour tout entier naturel n: $U_{n+1} - U_n \geqslant 0 \Rightarrow U_{n+1} \geqslant U_n$.

Donc sur $\mathbb{N}$, (U_n) est croissante.

2. a. Montrons que, pour tout entier naturel, $U_n \leqslant 0$, avec $a \leqslant 0$:

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n \leqslant 0$ ".

Initialisation: • $U_0 = a \leqslant 0$, par hypothèse.

• $U_1 = e^{2a} - e^a \iff U_1 = e^a\,(e^a - 1) \leqslant 0^*$.

(* car: $e^a > 0$ et $e^a < 1$, avec: $a \leqslant 0$).

Donc vrai aux rangs " 0 " et " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $U_n \leqslant 0$
et montrons qu'alors: $U_{n+1} \leqslant 0$.

Supposons: $U_n \leqslant 0$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

(1) $\Rightarrow e^{U_n} \leqslant e^0$

$\Rightarrow e^{U_n} - 1 \leqslant e^0 - 1$

$\Rightarrow e^{U_n} - 1 \leqslant 0$

$\Rightarrow e^{U_n}\,(e^{U_n} - 1) \leqslant e^{U_n} \times 0$ (car: $e^{U_n} > 0$)

$\Rightarrow U_{n+1} \leqslant 0$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, nous savons: $U_n \leqslant 0$.

2. b. (U_n) convergente ?

Nous savons que: • (U_n) est majorée par " 0 " car: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n \leqslant 0$;

• (U_n) est croissante.

Etant croissante et majorée, nous pouvons affirmer que: (U_n) est convergente.

2. c. Déterminons la limite de la suite (U_n) quand $a = 0$:

Si $a = 0$:
- $U_0 = 0$
- $U_1 = e^{2\times 0} - e^0 \Rightarrow U_1 = 0$
- $U_2 = e^{2\times 0} - e^0 \Rightarrow U_2 = 0$

...

- $U_{n-1} = 0$
- $U_n = 0$.

Ainsi, quand $a = 0$, nous sommes en présence d'une suite stationnaire car:

$$U_0 = U_1 = U_2 = \dots = U_n.$$

D'où: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$.

3. a. Démontrons que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} - U_n \geqslant g(a)$:

Sur $[0, +\infty[$, nous savons que la fonction g est croissante.

Par conséquent: $U_n \geqslant a \iff g(U_n) \geqslant g(a)$

$\iff U_{n+1} - U_n \geqslant g(a)$, (car: $g(U_n) = U_{n+1} - U_n$).

Au total, pour tout entier naturel n: $U_{n+1} - U_n \geqslant g(a)$, avec $a > 0$.

3. b. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n,
$U_n \geqslant a + n \times g(a)$, quand $a > 0$:

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n \geqslant a + n \times g(a)$ ".

Initialisation:
- $U_0 \geqslant a + 0 + g(a)$?

Oui car: $U_0 = a$ et $a \geqslant a$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $U_1 \geqslant a + 1 \times g(a)$?

D'après la question 3.a. : $U_1 \geqslant U_0 + g(a)$.

D'où: $U_1 \geqslant a + g(a) \iff U_1 \geqslant a + 1 + g(a)$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $U_n \geqslant a + n \times g(a)$
et montrons qu'alors: $U_{n+1} \geqslant a + (n+1)\, g(a)$.

Supposons : $U_n \geqslant a + n \times g(a)$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

(1) $\Rightarrow$ $U_n + g(a) \geqslant a + n \times g(a) + g(a)$

$\Rightarrow$ $U_{n+1} \geqslant a + (n+1) \times g(a)$ (car: $U_{n+1} \geqslant U_n + g(a)$)

Conclusion : Pour tout entier naturel n, nous avons: $U_n \geqslant a + n \times g(a)$.

3. c. Déterminons la limite de la suite (U_n):

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} a + n \times g(a)$, car: $U_n \geqslant a + n \times g(a)$,

$= +\infty$, car: $g(a) > 0$, d'après le tableau de variation.

D'où: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$, et donc quand $a > 0$, (U_n) est divergente.

4. a. Recopions la partie " Traitement ":

Traitement : **Tant que** $u \leqslant M$
affecter à n la valeur $n + 1$
affecter à u la valeur $e^{2u} - e^{u}$
Fin du Tant que

4. b. Déterminons la valeur affichée quand $M = 60$:

La valeur affichée est: $n = 36$.