

Corrigé

Exercice 3



freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

SÉRIE S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de la page 1/6 à la page 6/6.

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire
n° 99-186 du 16 novembre 1999.

*_*_*_*

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL - Série S	SESSION 2015	
ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES	SUJET	
	Coefficient : 9	Page 1/6
15MASC SG11	Durée : 4 heures	

Exercice 3

7 points

Commun à tous les candidats

Soit a un nombre réel fixé non nul.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = e^{u_n} (e^{u_n} - 1)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = e^{2x} - e^x - x.$$

- Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.
 - Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.
 - En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
2. Dans cette question, on suppose que $a \leq 0$.
- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 0$.
 - Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
 - Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n) .
3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq a$.
- Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$.
 - Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :
 $u_n \geq a + n \times g(a)$.
 - Déterminer la limite de la suite (u_n) .
4. Dans cette question, on prend $a = 0,02$.
L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur 0,02 n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que Fin tant que
Sortie	Afficher n

- Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.
- À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.

EXERCICE 3

[Centres Étrangers 2015]

1. a. a1. Calculons g' :

Ici, pour tout réel x : $g(x) = e^{2x} - e^x - x$.

Posons: $g = u + v + w$,

avec: $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x) = e^{2x}$, $v(x) = -e^x$ et $w(x) = -x$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur \mathbb{R} comme fonctions "exponentielle".

De plus, la fonction w est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme.

Par conséquent, g est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de 3 fonctions dérivables sur \mathbb{R} : $u + v + w$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer g' sur \mathbb{R} .

$\forall x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1$.

Au total: $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1$.

1. a. a2. Montrons que $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$:

Nous savons que: $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1$.

Or: $(e^x - 1)(2e^x + 1) = 2e^{2x} + e^x - 2e^x - 1$

cad: $(e^x - 1)(2e^x + 1) = 2e^{2x} - e^x - 1$.

Au total, nous avons bien: $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.

I. b. Tableau de variation de g + " son minimum ":

- Pour déterminer le minimum de g , résolvons l'équation: $g'(x) = 0$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - e^x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x - 1)(2e^x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x - 1) = 0 \text{ et/ou } (2e^x + 1) = 0. \quad (1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: e^x > 0 \Rightarrow 2e^x > 0 \Rightarrow 2e^x + 1 > 1.$$

$$\text{D'où: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Rightarrow x^* = 0.$$

Le minimum de g est donc le point A , avec: $A(0, g(0))$ cad $A(0, 0)$.

- D'où le tableau de variation de g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

I. c. Etudions le sens de variation de la suite (U_n) :

$$\text{Soit: } g(U_n) = U_{n+1} - U_n.$$

Ici, n est un entier naturel.

Or, sur \mathbb{N} : $g(U_n) \geq 0$ (tableau de variation précédent).

$$\text{D'où, pour tout entier naturel } n: U_{n+1} - U_n \geq 0 \Rightarrow U_{n+1} \geq U_n.$$

Donc sur \mathbb{N} , (U_n) est croissante.

2. a. Montrons que, pour tout entier naturel, $U_n \leq 0$, avec $a \leq 0$:

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n : $U_n \leq 0$ ".

Initialisation: • $U_0 = a \leq 0$, par hypothèse.

$$\bullet U_1 = e^{2a} - e^a \iff U_1 = e^a (e^a - 1) \leq 0^*$$

(* car: $e^a > 0$ et $e^a < 1$, avec: $a \leq 0$).

Donc vrai aux rangs " 0 " et " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $U_n \leq 0$
et montrons qu'alors: $U_{n+1} \leq 0$.

Supposons: $U_n \leq 0$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

$$(1) \Rightarrow e^{U_n} \leq e^0$$

$$\Rightarrow e^{U_n} - 1 \leq e^0 - 1$$

$$\Rightarrow e^{U_n} - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow e^{U_n} (e^{U_n} - 1) \leq e^{U_n} \times 0 \quad (\text{car: } e^{U_n} > 0)$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \leq 0.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n , nous savons: $U_n \leq 0$.

2. b. (U_n) convergente ?

Nous savons que: • (U_n) est majorée par " 0 " car: $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq 0$;

• (U_n) est croissante.

Etant croissante et majorée, nous pouvons affirmer que: (U_n) est convergente.

2. c. Déterminons la limite de la suite (U_n) quand $a = 0$:

- Si $a = 0$:
- $U_0 = 0$
 - $U_1 = e^{2 \times 0} - e^0 \Rightarrow U_1 = 0$
 - $U_2 = e^{2 \times 0} - e^0 \Rightarrow U_2 = 0$
 - ...
 - $U_{n-1} = 0$
 - $U_n = 0$.

Ainsi, quand $a = 0$, nous sommes en présence d'une suite stationnaire car:

$$U_0 = U_1 = U_2 = \dots = U_n.$$

D'où: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$.

3. a. Démontrons que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} - U_n \geq g(a)$:

Sur $[0, +\infty[$, nous savons que la fonction g est croissante.

Par conséquent: $U_n \geq a \Leftrightarrow g(U_n) \geq g(a)$

$$\Leftrightarrow U_{n+1} - U_n \geq g(a), \quad (\text{car: } g(U_n) = U_{n+1} - U_n).$$

Au total, pour tout entier naturel n : $U_{n+1} - U_n \geq g(a)$, avec $a > 0$.

3. b. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n ,
 $U_n \geq a + n \times g(a)$, quand $a > 0$:

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n : $U_n \geq a + n \times g(a)$ ".

Initialisation: • $U_0 \geq a + 0 + g(a)$?

Oui car: $U_0 = a$ et $a \geq a$.

Donc vrai au rang " 0 ".

$$\bullet U_1 \geq a + 1 \times g(a) ?$$

$$\text{D'après la question 3a.: } U_1 \geq U_0 + g(a).$$

$$\text{D'où: } U_1 \geq a + g(a) \Leftrightarrow U_1 \geq a + 1 + g(a).$$

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $U_n \geq a + n \times g(a)$
et montrons qu'alors: $U_{n+1} \geq a + (n+1) g(a)$.

Supposons: $U_n \geq a + n \times g(a)$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

$$(1) \Rightarrow U_n + g(a) \geq a + n \times g(a) + g(a)$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \geq a + (n+1) \times g(a) \quad (\text{car: } U_{n+1} \geq U_n + g(a))$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n , nous avons: $U_n \geq a + n \times g(a)$.

3. c. Déterminons la limite de la suite (U_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a + n \times g(a), \quad \text{car: } U_n \geq a + n \times g(a),$$

$$= +\infty, \quad \text{car: } g(a) > 0, \text{ d'après le tableau de variation.}$$

D'où: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$, et donc quand $a > 0$, (U_n) est divergente.

4. a. Recopions la partie " Traitement ":

Traitement: Tant que $u \leq M$

 affecter à n la valeur $n + 1$

 affecter à u la valeur $e^{2u} - e^u$

Fin du Tant que

4. b. Déterminons la valeur affichée quand $M = 60$:

La valeur affichée est: $n = 36$.