Corrigé

Exercice 1

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

SÉRIE S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de la page 1/6 à la page 6/6.

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

--*-*

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 4 points

Commun à tous les candidats

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.
Les parties A, B et C sont indépendantes.

Un fournisseur produit deux sortes de cadenas. Les uns sont *premier prix*, et les autres sont *haut de gamme*. Un magasin de bricolage dispose d'un stock de cadenas provenant de ce fournisseur ; ce stock comprend un grand nombre de cadenas de chaque type.

Partie A

1. Le fournisseur affirme que, parmi les cadenas *haut de gamme*, il n'y a pas plus de 3 % de cadenas défectueux dans sa production. Le responsable du magasin de bricolage désire vérifier la validité de cette affirmation dans son stock ; à cet effet, il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas *haut de gamme*, et en trouve 19 qui sont défectueux.

   Ce contrôle remet-il en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3 % de cadenas défectueux ?
   On pourra pour cela utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.
2. Le responsable du magasin souhaite estimer la proportion de cadenas défectueux dans son stock de cadenas *premier prix*. Pour cela il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas *premier prix*, parmi lesquels 39 se révèlent défectueux.

   Donner un intervalle de confiance de cette proportion au niveau de confiance 95 %.

Partie B

D'après une étude statistique faite sur plusieurs mois, on admet que le nombre X de cadenas *premier prix* vendus par mois dans le magasin de bricolage peut être modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 750$ et d'écart-type $\sigma = 25$.

1. Calculer $P(725 \leqslant X \leqslant 775)$.
2. Le responsable du magasin veut connaître le nombre n de cadenas *premier prix* qu'il doit avoir en stock en début de mois, pour que la probabilité d'être en rupture de stock en cours de mois soit inférieure à 0,05. *On ne réalimente pas le stock en cours de mois.*

   Déterminer la plus petite valeur de l'entier n remplissant cette condition.

Partie C

On admet maintenant que, dans le magasin :

- 80 % des cadenas proposés à la vente sont *premier prix*, les autres *haut de gamme* ;
- 3 % des cadenas *haut de gamme* sont défectueux ;
- 7 % des cadenas sont défectueux.

On prélève au hasard un cadenas dans le magasin. On note :

- p la probabilité qu'un cadenas *premier prix* soit défectueux ;
- H l'évènement : « le cadenas prélevé est *haut de gamme* » ;
- D l'évènement : « le cadenas prélevé est défectueux ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Exprimer en fonction de p la probabilité $P(D)$. En déduire la valeur du réel p.
Le résultat obtenu est-il cohérent avec celui de la question A - 2. ?

3. Le cadenas prélevé est en bon état. Déterminer la probabilité que ce soit un cadenas *haut de gamme*.

EXERCICE 1

[Centres Étrangers 2015]

Partie A: Intervalles

1. Ce contrôle remet-il en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3% de cadenas défectueux ?

Pour répondre à cette question, nous allons utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.

Ici, nous avons:
- $n = 500$
- $p = 3\%$
- $f = \frac{19}{500}$ => $f = 3,8\%$.

Dans ces conditions:

$n = 500 \geqslant 30$, $n \cdot p = 15 \geqslant 5$ et $n \cdot (1 - p) = 485 \geqslant 5$.

Les conditions sont donc réunies.

On choisit un échantillon de 500.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [\, 0,015 ; 0,045 \,]$.

Or: $f \approx 3,8\% \in I$.

Ainsi, **non** le test réalisé ne remet pas en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3% de cadenas défectueux.

2. Donnons un intervalle de confiance de cette proportion au niveau de confiance 95%:

Ici, nous avons:
- $n = 500$
- $f = \dfrac{39}{500}$ => $f = 7,8\%$.

Dans ces conditions:

$n = 500 \geqslant 30$, $n \cdot f = 39 \geqslant 5$ et $n \cdot (1 - f) = 461 \geqslant 5$.

Les conditions étant réunies, un intervalle de confiance à 95% de cette proportion s'écrit:

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [\, 3,3\% ; 12,3\% \,]$.

Partie B: Cadenas premier prix

1. Calculons $P\,(725 \leqslant X \leqslant 775)$:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X est la variable aléatoire qui correspond au nombre de cadenas premier prix vendu par mois.
- X suit la loi normale d'espérance $\mu = 750$ et d'écart type $\sigma = 25$.
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de calculer: $P(725 \leqslant X \leqslant 775)$.

Nous remarquons que: $725 = \mu - \sigma$ et $775 = \mu + \sigma$.

Or, d'après le cours, $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,683$.

D'où: $P(725 \leqslant X \leqslant 775) \approx 0,683$.

Au total, la probabilité demandée est de: 68,3%.

2. Déterminons la plus petite valeur de l'entier n:

Il s'agit de déterminer l'entier n tel que: $P(X > n) \leqslant 0,05$.

$$P(X > n) \leqslant 0,05 \iff P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{n - 750}{25}\right) \leqslant 0,05$$

$$\iff P\left(T > \frac{n - 750}{25}\right) \leqslant 0,05$$

$$\iff P\left(T \leqslant \frac{n - 750}{25}\right) \geqslant 0,95.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{n - 750}{25} \approx 1,645 \Rightarrow n \approx 791,125$$

$$\Rightarrow n \approx 792 \text{ cadenas.}$$

Au total, la valeur recherchée pour n est d'environ: 792 cadenas.

EXERCICE 1

[Centres Étrangers 2015]

Partie C: Les cadenas

1. Représentons la situation à l'aide d'un arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

- H = " le cadenas est haut de gamme ".
- $\overline{H}$ = " le cadenas est premier prix ".
- D = " le cadenas prélevé est défectueux ".

- $P(H) = 20\%$
- $P(\overline{H}) = 80\%$

$(20\% + 80\% = 1)$.

- $P(D) = 7\%$
- $P(\overline{D}) = 93\%$

$(7\% + 93\% = 1)$.

- $P_H(D) = 3\%$
- $P_H(\overline{D}) = 97\%$

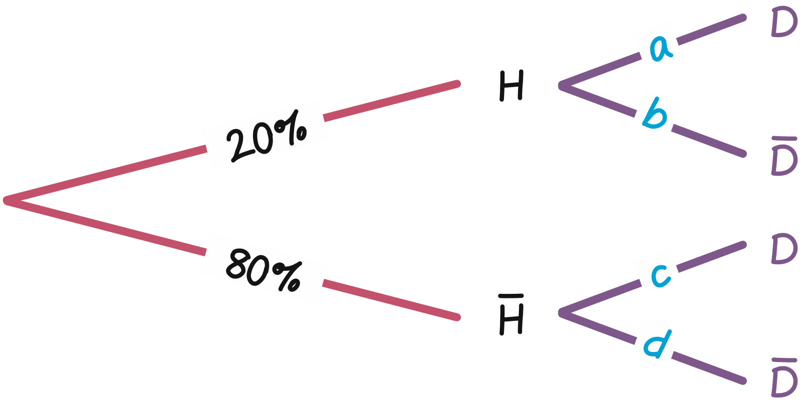
$(3\% + 97\% = 1)$.

- $P_{\overline{H}}(D) = p$
- $P_{\overline{H}}(\overline{D}) = 1 - p$

$(p + (1 - p) = 1)$.

Nous pouvons représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

D'où l'arbre pondéré suivant:



, avec:
- $a = 3\%$
- $b = 97\%$
- $c = p$
- $d = 1 - p$

2. a. Exprimons P (D) en fonction de p:

L'événement $D = (D \cap H) \cup (D \cap \overline{H})$.

D'où: $P(D) = P(D \cap H) + P(D \cap \overline{H})$

$= P_H(D) \times P(H) + P_{\overline{H}}(D) \times P(\overline{H})$.

Ainsi: $P(D) = 3\% \times 20\% + p \times 80\%$

$\Rightarrow P(D) = 0.8 \times p + 0.006$.

2. b. Déduisons-en la valeur de p avec P (D) = 7%:

$P(D) = 7\% \iff 0.8 \times p + 0.006 = 0.7$

$\Rightarrow p = 8\%$.

Au total, la probabilité qu'un cadenas premier prix soit défectueux est de: 8%.

2. c. Le résultat est-il cohérent ?

Oui.

3. Déterminons la probabilité que ce soit un cadenas haut de gamme:

Ici, il s'agit de calculer: $P_{\overline{D}}(H)$.

$$P_{\overline{D}}(H) = \frac{P(\overline{D} \cap H)}{P(\overline{D})} \iff P_{\overline{D}}(H) = \frac{P_H(\overline{D}) \times P(H)}{1 - P(D)}.$$

Ainsi: $P_{\overline{D}}(H) = \dfrac{0.97 \times 0.2}{0.93} \Rightarrow P_{\overline{D}}(H) \approx 20.9\%$.

Au total, la probabilité demandée est de: 20.9%.