EXERCICE 1

[Centres Étrangers 2015]

Partie A: Intervalles

1. **Ce contrôle remet-il en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3% de cadenas défectueux ?**

Pour répondre à cette question, nous allons utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.

Ici, nous avons:
- $n = 500$
- $p = 3\%$
- $f = \frac{19}{500} \Rightarrow f = 3,8\%$.

Dans ces conditions:

$n = 500 \geq 30$, $n \cdot p = 15 \geq 5$ et $n \cdot (1 - p) = 485 \geq 5$.

Les conditions sont donc réunies.

On choisit un échantillon de 500.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [\, 0,015 ; 0,045 \,]$.

Or: $f \approx 3,8\% \in I$.

Ainsi, **non** le test réalisé ne remet pas en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3% de cadenas défectueux.

2. Donnons un intervalle de confiance de cette proportion au niveau de confiance 95%:

Ici, nous avons: • $n = 500$

• $f = \frac{39}{500}$ => $f = 7,8\%$.

Dans ces conditions:

$n = 500 \geqslant 30$, $n \cdot f = 39 \geqslant 5$ et $n \cdot (1 - f) = 461 \geqslant 5$.

Les conditions étant réunies, un intervalle de confiance à 95% de cette proportion s'écrit:

$$I = [\, f - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}} \,].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [\,3,3\%;\ 12,3\%\,]$.

Partie B: Cadenas premier prix

1. Calculons $P\,(725 \leqslant X \leqslant 775)$:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X est la variable aléatoire qui correspond au nombre de cadenas premier prix vendu par mois.
- X suit la loi normale d'espérance $\mu = 750$ et d'écart type $\sigma = 25$.
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de calculer: $P(725 \leqslant X \leqslant 775)$.

Nous remarquons que: $725 = \mu - \sigma$ et $775 = \mu + \sigma$.

Or, d'après le cours, $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,683$.

D'où: $P(725 \leqslant X \leqslant 775) \approx 0,683$.

Au total, la probabilité demandée est de: 68,3%.

2. Déterminons la plus petite valeur de l'entier n:

Il s'agit de déterminer l'entier n tel que: $P(X > n) \leqslant 0,05$.

$$P(X > n) \leqslant 0,05 \iff P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{n-750}{25}\right) \leqslant 0,05$$

$$\iff P\left(T > \frac{n-750}{25}\right) \leqslant 0,05$$

$$\iff P\left(T \leqslant \frac{n-750}{25}\right) \geqslant 0,95.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{n-750}{25} \approx 1,645 \implies n \approx 791,125$$

$$\implies n \approx 792 \text{ cadenas.}$$

Au total, la valeur recherchée pour n est d'environ: 792 cadenas.

EXERCICE 1

[Centres Étrangers 2015]

Partie C: Les cadenas

1. Représentons la situation à l'aide d'un arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

- H = " le cadenas est haut de gamme ".
- $\overline{H}$ = " le cadenas est premier prix ".
- D = " le cadenas prélevé est défectueux ".

- $P(H) = 20\%$
- $P(\overline{H}) = 80\%$

$(20\% + 80\% = 1)$.

- $P(D) = 7\%$
- $P(\overline{D}) = 93\%$

$(7\% + 93\% = 1)$.

- $P_H(D) = 3\%$
- $P_H(\overline{D}) = 97\%$

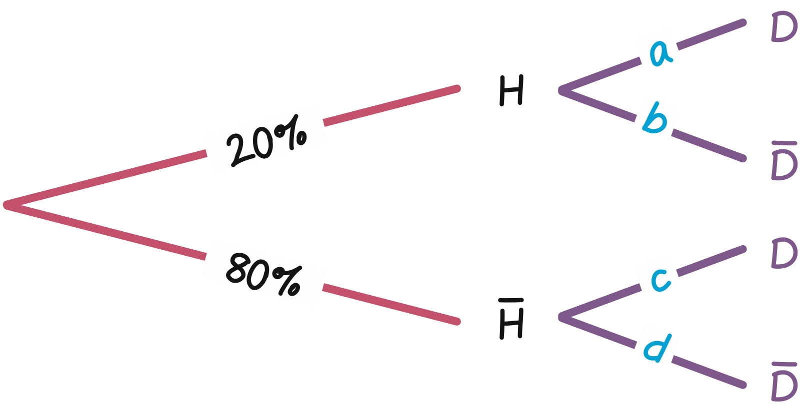
$(3\% + 97\% = 1)$.

- $P_{\overline{H}}(D) = p$
- $P_{\overline{H}}(\overline{D}) = 1 - p$

$(p + (1 - p) = 1)$.

Nous pouvons représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

D'où l'arbre pondéré suivant:



, avec:

- $a = 3\%$
- $b = 97\%$
- $c = p$
- $d = 1 - p$

2. a. Exprimons P (D) en fonction de p:

L'événement $D = (D \cap H) \cup (D \cap \overline{H})$.

D'où: $P (D) = P (D \cap H) + P (D \cap \overline{H})$

$= P_H (D) \times P (H) + P_{\overline{H}} (D) \times P (\overline{H})$.

Ainsi: $P (D) = 3\% \times 20\% + p \times 80\%$

$\Rightarrow P (D) = 0.8 \times p + 0.006$.

2. b. Déduisons-en la valeur de p avec P (D) = 7%:

$P (D) = 7\% \iff 0.8 \times p + 0.006 = 0.7$

$\Rightarrow p = 8\%$.

Au total, la probabilité qu'un cadenas premier prix soit défectueux est de: 8%.

2. c. Le résultat est-il cohérent ?

Oui.

3. **Déterminons la probabilité que ce soit un cadenas haut de gamme**:

Ici, il s'agit de calculer: $P_{\overline{D}}(H)$.

$$P_{\overline{D}}(H) = \frac{P(\overline{D} \cap H)}{P(\overline{D})} \iff P_{\overline{D}}(H) = \frac{P_H(\overline{D}) \times P(H)}{1 - P(D)}.$$

Ainsi: $P_{\overline{D}}(H) = \dfrac{0.97 \times 0.2}{0.93} \Rightarrow P_{\overline{D}}(H) \approx 20.9\%$.

Au total, la probabilité demandée est de: 20.9%.