

Corrigé

Exercice 3



freemaths.fr

LES MATHÉMATIQUES

AU BACCALAURÉAT S

NOMBRES COMPLEXES, BAC S

- *Affixe d'un nombre complexe*
- *Écriture algébrique d'un nombre complexe*
- *Nombre complexe conjugué*
- *Écriture géométrique d'un nombre complexe*
- *Écriture trigonométrique d'un nombre complexe*
- *Argument d'un nombre complexe*
- *Module d'un nombre complexe*
- *Partie imaginaire d'un nombre complexe*
- *Partie réelle d'un nombre complexe*
- *Représentation géométrique d'un nombre complexe*
- *Triangle équilatéral direct*

EXERCICE 3

[Antilles-Guyane 2019]

1. L'affirmation 1 est: **Fausse.**

En effet, ici: $c = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Dans ces conditions: $c = \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$

$$\Leftrightarrow c = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{1}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ cad: } c = \frac{1}{4} (1 + i\sqrt{3}).$$

Au total: $c = \frac{1}{4} (1 + i\sqrt{3}) \neq \frac{1}{4} (1 - i\sqrt{3}).$

2. L'affirmation 2 est: **Vraie.**

En effet, ici: $c = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Dans ces conditions: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c^{3n} = \left(\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^{3n}$

$$\Leftrightarrow c^{3n} = \left(\frac{1}{2} \right)^{3n} \times e^{i\left(\frac{3n\pi}{3}\right)}$$

(d'après la formule de Moivre)

$$\Leftrightarrow c^{3n} = \frac{1}{8^n} \times e^{in\pi} \text{ cad: } c^{3n} = \frac{1}{8^n} \times (-1)^n.$$

Au total: $c^{3n} = (-1)^n \times \frac{1}{8^n} \in \mathbb{R}$.

3. L'affirmation 3 est: **Vraie**.

En effet, ici les points O, S et T ont pour affixes respectifs:

• O: $z' = 0$,

• S: $z'' = c^2 = \frac{1}{4} e^{i\frac{2\pi}{3}}$,

• T: $z''' = \frac{1}{c} = 2 e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Or, d'après le cours, les points A, B et C sont alignés ssi: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

Ici nous avons:
$$\frac{z'' - z'}{z''' - z'} = \frac{\frac{1}{4} e^{i\frac{2\pi}{3}} - 0}{2 e^{-i\frac{\pi}{3}} - 0}$$

$$= \frac{1}{8} e^{i\frac{2\pi}{3} + i\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{8} e^{i\pi} \in \mathbb{R} \text{ car: } e^{i\pi} = -1.$$

Au total: $\frac{z'' - z'}{z''' - z'} = -\frac{1}{8} \in \mathbb{R}$, donc les points O, S et T sont bien alignés.

4. L'affirmation 4 est: **Vraie**.

En effet, soit $X = |c| + |c^2| + \dots + |c^n|$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$X = |c| + |c|^2 + \dots + |c|^n$$

$$= \frac{1 - |c|^{(n+1)}}{1 - |c|} - 1, \text{ car: } 1 + q + q^2 \dots + q^n = \frac{1 - q^{(n+1)}}{1 - q}$$

$$= \frac{1 - |c|^{(n+1)} - 1 + |c|}{1 - |c|}$$

$$= \frac{|c| - |c|^{(n+1)}}{1 - |c|}$$

Or: $|c| = \frac{1}{2}$.

D'où: $X = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$ **cad:** $X = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Au total: $|c| + |c^2| + \dots + |c^n| = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.