Corrigé

Exercice 1

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU MARDI 19 JUIN 2018

MATHÉMATIQUES

– Série S –

Enseignement Spécialité Coefficient : 9

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1 à 8.

Exercice 1 (5 *points*)

Commun à tous les candidats

L'exploitant d'une forêt communale décide d'abattre des arbres afin de les vendre, soit aux habitants de la commune, soit à des entreprises. On admet que :

- parmi les arbres abattus, 30 % sont des chênes, 50 % sont des sapins et les autres sont des arbres d'essence secondaire (ce qui signifie qu'ils sont de moindre valeur) ;
- 45,9 % des chênes et 80 % des sapins abattus sont vendus aux habitants de la commune ;
- les trois quarts des arbres d'essence secondaire abattus sont vendus à des entreprises.

Partie A

Parmi les arbres abattus, on en choisit un au hasard.
On considère les événements suivants :

- C : « l'arbre abattu est un chêne » ;
- S : « l'arbre abattu est un sapin » ;
- E : « l'arbre abattu est un arbre d'essence secondaire » ;
- H : « l'arbre abattu est vendu à un habitant de la commune ».

1. Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'arbre abattu soit un chêne vendu à un habitant de la commune.
3. Justifier que la probabilité que l'arbre abattu soit vendu à un habitant de la commune est égale à $0{,}5877$.
4. Quelle est la probabilité qu'un arbre abattu vendu à un habitant de la commune soit un sapin ?
   On donnera le résultat arrondi à 10^{-3}.

Partie B

Le nombre d'arbres sur un hectare de cette forêt peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance $\mu = 4000$ et d'écart-type $\sigma = 300$.

1. Déterminer la probabilité qu'il y ait entre 3 400 et 4 600 arbres sur un hectare donné de cette forêt. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3}.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait plus de 4 500 arbres sur un hectare donné de cette forêt. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3}.

Partie C

L'exploitant affirme que la densité de sapins dans cette forêt communale est de 1 sapin pour 2 arbres.
Sur une parcelle, on a compté 106 sapins dans un échantillon de 200 arbres.
Ce résultat remet-il en cause l'affirmation de l'exploitant ?

EXERCICE 1

[Antilles-Guyane 2018]

Partie A:

1. Construisons un arbre pondéré complet traduisant la situation:

D'après l'énoncé, nous avons:

- C = " l'arbre abattu est un chêne ".
- S = " l'arbre abattu est un sapin ".
- E = " l'arbre abattu est d'essence secondaire ".
- H = " l'arbre abattu est vendu à un habitant de la commune ".
- $\overline{H}$ = " l'arbre abattu est vendu à une entreprise ".

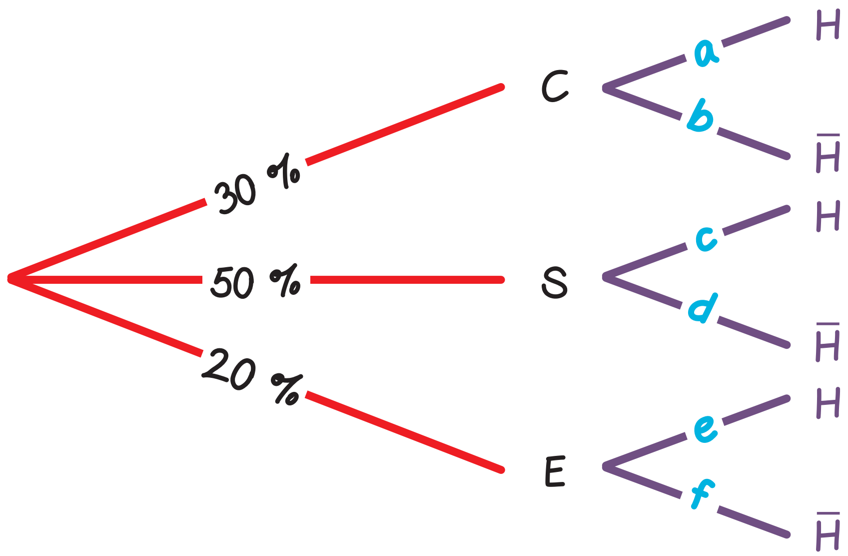
- $P(C) = 30\%$
- $P(S) = 50\%$
- $P(E) = 20\%$.

- $P_C(H) = 45,9\%$
- $P_C(\overline{H}) = 1 - 45,9\% = 54,1\%$.

- $P_S(H) = 80\%$
- $P_S(\overline{H}) = 1 - 80\% = 20\%$.

- $P_E(H) = 1 - 75\% = 25\%$
- $P_E(\overline{H}) = 75\%$.

Nous avons ainsi l'arbre pondéré suivant:



, avec:
- $a = 45,9\%$
- $b = 54,1\%$
- $c = 80\%$
- $d = 20\%$
- $e = 25\%$
- $f = 75\%$

2. Calculons la probabilité que l'arbre abattu soit un chêne vendu à un habitant de la commune:

Cela revient à calculer: $P(C \cap H)$.

$P(C \cap H) = P_C(H) \times P(C)$.

Ainsi: $P(C \cap H) = 45,9\% \times 30\%$ cad: $P(C \cap H) = 13,77\%$.

Au total, la probabilité que l'arbre abattu soit un chêne vendu à un habitant de la commune est de: $13,77\%$.

3. Montrons que $P(H) = 0,5877$:

Nous devons calculer: $P(H)$.

Or, l'événement $H = (H \cap C) \cup (H \cap S) \cup (H \cap E)$.

D'où: $P(H) = P(H \cap C) + P(H \cap S) + P(H \cap E)$

$$= P_C(H) \times P(C) + P_S(H) \times P(S) + P_E(H) \times P(E).$$

Ainsi: $P(H) = 45,9\% \times 30\% + 80\% \times 50\% + 25\% \times 20\%$

$\Rightarrow P(H) = 58,77\%.$

Au total, nous avons bien: $P(H) = 0,5877.$

4. Déterminons la probabilité qu'un arbre abattu vendu à un habitant de la commune soit un sapin:

Cela revient à calculer: $P_H(S)$.

$$P_H(S) = \frac{P(H \cap S)}{P(H)}$$

$$= \frac{P_S(H) \times P(S)}{P(H)}.$$

Ainsi: $P_H(S) = \dfrac{80\% \times 50\%}{58,77\%} \Rightarrow P_H(S) \approx 68,1\%$, arrondi à 10^{-3} près.

Au total, la probabilité qu'un arbre abattu vendu à un habitant de la commune soit un sapin est d'environ: $68,1\%$.

Partie B:

1. Déterminons $P(3\,400 \leqslant X \leqslant 4600)$:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X suit la loi normale d'espérance $\mu = 4000$ arbres et d'écart type $\sigma = 300$ arbres.
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de calculer: $P(3\,400 \leqslant X \leqslant 4600)$.

Nous remarquons que: $3400 = \mu - 2\sigma$ et $4600 = \mu + 2\sigma$.

Or, d'après le cours: $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.

D'où: $P(3400 \leqslant X \leqslant 4600) \approx 0,954$.

Au total: $P(3400 \leqslant X \leqslant 4600) \approx 0,954$.

2. Calculons la probabilité qu'il y ait plus de 4500 arbres sur un hectare donné:

Il s'agit de calculer: $P(X \geqslant 4500)$.

$$P(X \geqslant 4500) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geqslant \frac{4500 - 4000}{300}\right)$$

$$= P\left(T \geqslant \frac{5}{3}\right)$$

$$= 1 - P(T \leqslant 1,67).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(X \geqslant 4500) \approx 4,8\%, \text{ arrondi à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Au total, la probabilité qu'il y ait plus de 4500 arbres sur un hectare donné de cette forêt est d'environ: $4,8\%$.

Partie C:

Le résultat observé remet-il en cause l'affirmation de l'exploitant ?

Ici, nous avons:
- $n = 200$
- $p = 50\%$
- $f = \frac{106}{200}$ => $f = 53\%$.

Dans ces conditions:

$n = 200 \geq 30$, $n \cdot p = 100 \geq 5$ et $n \cdot (1 - p) = 100 \geq 5$.

Les conditions sont donc réunies.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right],$$

cad: $I = \left[50\% - 1,96 \times \sqrt{\frac{50\% \times 50\%}{200}} ; 50\% + 1,96 \times \sqrt{\frac{50\% \times 50\%}{200}} \right].$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I = [\, 43\% ; 57\% \,]$.

Or la fréquence " f ", sur l'échantillon, est telle que: $f = 53\ \% \in I$.

Ainsi, **non** le résultat observé ne remet pas en cause l'affirmation de l'exploitant agricole.