Corrigé

Exercice 5

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : **9**

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7 dont une ANNEXE qui n'est pas à rendre.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de cinq exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

spécialité

freemaths.fr freemaths.fr

Exercice 5 (5 *points*)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = 2u_n + 6.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 9 \times 2^n - 6.$$

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, u_n est divisible par 6.

On définit la suite d'entiers (v_n) par, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = \frac{u_n}{6}$.

3. On considère l'affirmation : « pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier ».
Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

4.

a. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} - 2v_n = 1$.

b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.

c. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, le PGCD de u_n et u_{n+1}.

5.

a. Vérifier que $2^4 \equiv 1\ [5]$.

b. En déduire que si n est de la forme $4k + 2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.

c. Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ? Justifier.

EXERCICE 5

[Antilles-Guyane 2017]

1. Démontrons que, pour tout entier naturel n, $U_n = 9 \times 2^n - 6$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n = 9 \times 2^n - 6$ ".

Initialisation: • $U_0 = 9 \times 2^0 - 6$?

oui car: $9 \times 2^0 - 6 = 3$,

et: $U_0 = 3$, d'après l'énoncé.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n = 9 \times 2^n - 6$
et montrons qu'alors $U_{n+1} = 9 \times 2^{(n+1)} - 6$.

Supposons: $U_n = 9 \times 2^n - 6$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

$(1) \Rightarrow 2 \times U_n = 9 \times 2^{(n+1)} - 12$

$\Rightarrow 2 \times U_n + 6 = 9 \times 2^{(n+1)} - 12 + 6$

$\Rightarrow 2 \times U_n + 6 = 9 \times 2^{(n+1)} - 6$

$\Rightarrow U_{n+1} = 9 \times 2^{(n+1)} - 6$.

Conclusion: pour tout entier naturel n, nous avons: $U_n = 9 \times 2^n - 6$.

2. Montrons que, pour tout entier $n \geqslant 1$, U_n est divisible par 6:

Pour tout entier $n \geqslant 1$: $U_n = 9 \times 2^n - 6 \iff U_n = 18 \times 2^{(n-1)} - 6$

$\Rightarrow U_n = 6 \times [3 \times 2^{(n-1)} - 1]$.

Or: $[3 \times 2^{(n-1)} - 1]$ est un entier relatif pour tout entier $n \geqslant 1$.

Par conséquent: pour tout entier $n \geqslant 1$, U_n est bien divisible par 6.

3. Indiquons si cette affirmation est vraie ou fausse:

Ici, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $V_n = \dfrac{U_n}{6} \iff V_n = 3 \times 2^{(n-1)} - 1$.

Nous allons montrer que cette affirmation est fausse en prenant un contre exemple.

En effet, en prenant $\mathbf{n = 6}$: $V_6 = 3 \times 2^5 - 1 \iff V_6 = 95$

$\iff V_6 = 5 \times 19$.

Ainsi: V_6 n'est pas un nombre premier.

Par conséquent, nous pouvons dire que: l'affirmation est **fausse**.

4. a. Montrons que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $V_{n+1} - 2\,V_n = 1$:

$V_{n+1} - 2\,V_n = [3 \times 2^{(n+1-1)} - 1] - 2 \times [3 \times 2^{(n-1)} - 1]$

$= [3 \times 2^n - 1] - [3 \times 2^n - 2]$

$= 1$.

Au total: pour tout entier $n \geqslant 1$, nous avons bien: $V_{n+1} - 2 \times V_n = 1$.

4. b. Déduisons-en que pour tout entier $n \geqslant 1$, V_n et V_{n+1} sont premiers entre eux:

Pour répondre à cette question, nous allons appliquer le théorème de **BÉZOUT**.

D'après ce théorème: " Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. a et b sont premiers entre eux ssi il existe deux entiers u et v tels que: $a \cdot u + b \cdot v = 1$ ".

Ici: $V_{n+1} - 2 \times V_n = 1 \iff V_n \times (-2) + V_{n+1} \times (1) = 1$

$\iff V_n \times u + V_{n+1} \times v = 1$, avec: $u = -2$ et $v = 1$.

Comme V_n et V_{n+1} sont deux entiers relatifs non nuls, nous pouvons affirmer qu'ils sont premiers entre eux car: il existe bien deux entiers relatifs u (= -2) et v (= 1) tels que $V_n \times u + V_{n+1} \times v = 1$.

Au total: pour tout entier $n \geqslant 1$, V_n et V_{n+1} sont bien premiers entre eux.

4. c. Déduisons-en, pour tout entier $n \geqslant 1$, PGCD $(U_n ; U_{n+1})$:

D'après la question précédente, nous savons que pour tout entier $n \geqslant 1$, V_n et V_{n+1} sont premiers entre eux.

Dans ces conditions: PGCD $(V_n ; V_{n+1}) = 1$.

D'où: PGCD $(U_n ; U_{n+1})$ = PGCD $(6V_n ; 6V_{n+1})$, car $V_n = \dfrac{U_n}{6}$

$= 6 \times$ PGCD $(V_n ; V_{n+1})$

$= 6 \times 1 = 6$.

Au total: pour tout entier $n \geqslant 1$, PGCD $(U_n ; U_{n+1}) = 6$.

5. a. Vérifions que $2^4 \equiv 1\ [5]$:

$2^4 = 16$ et $16 = 3 \times 5 + 1$.

Donc: $2^4 \equiv 1\,[5]$.

Au total, nous avons bien: $2^4 \equiv 1\,[5]$.

5. b. Déduisons-en que si $n = 4k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$) alors U_n est divisible par 5:

Si $n = 4k + 2$, alors: $U_n = 9 \times 2^{(4k+2)} - 6$

$\Rightarrow U_n = 9 \times 4 \times 2^{(4k)} - 6$

$\Rightarrow U_n = 36 \times (2^4)^k - 6$.

Or: $2^4 \equiv 1\,[5]$.

D'où: $U_n \equiv 36 \times (1)^k - 6\,[5]$

$\Rightarrow U_n \equiv 36 - 6\,[5]$

$\Rightarrow U_n \equiv 30\,[5]$ cad $U_n \equiv 0\,[5]$.

Au total si $n = 4k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$) alors: U_n est bien divisible par 5 **car** $U_n \equiv 0\,[5]$.

5. c. Le nombre U_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de $n \in \mathbb{N}$?

La réponse est: **non**.

Et nous allons prendre un contre-exemple pour le justifier.

Soit: $n = 4k + 7$, $U_n = 9 \times 2^7 \times (2^4)^k - 6$

$\Leftrightarrow U_n = 1152 \times (2^4)^k - 6$.

Dans ces conditions: $U_n \equiv 1152 - 6\,[5]$, car $(2^4) \equiv 1\,[5]$,

cad: $U_n \equiv 1\,[5]$ **($1152 - 6 = 229 \times 5 + 1$)**.

Ainsi: si $n = 4k + 7$, U_n n'est pas divisible par 5 car $U_n \equiv 1\,[5]$.