Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : **9**

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7 dont une ANNEXE qui n'est pas à rendre.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de cinq exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

spécialité

freemaths.fr freemaths.fr

Exercice 3 (3 *points*)

Commun à tous les candidats

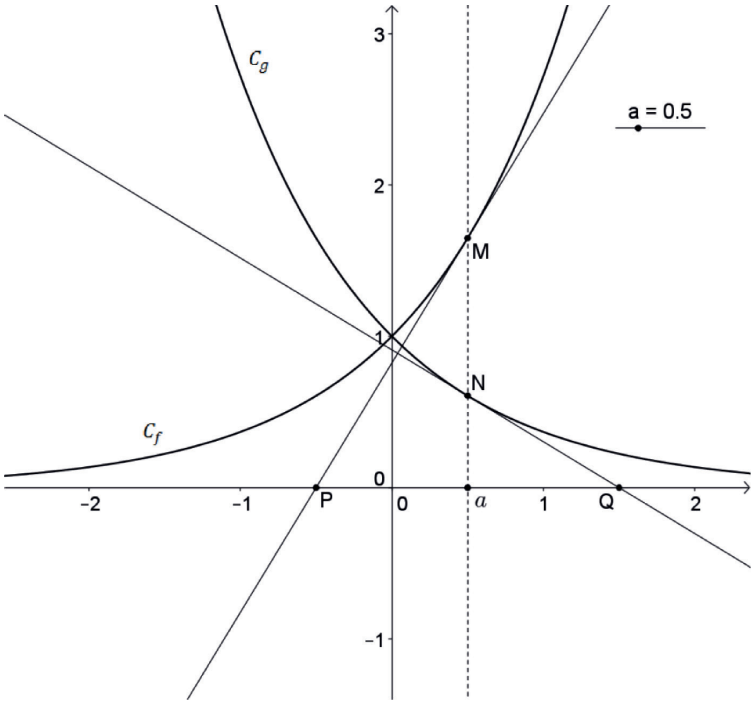
Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble **R** des nombres réels par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \text{ et } g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f et C_g celle de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

Pour tout réel a, on note M le point de C_f d'abscisse a et N le point de C_g d'abscisse a.
La tangente en M à C_f coupe l'axe des abscisses en P, la tangente en N à C_g coupe l'axe des abscisses en Q.

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a représenté la situation pour différentes valeurs de a et on a relevé dans un tableur la longueur du segment [PQ] pour chacune de ces valeurs de a.



	A	B
1	Abscisse a	Longueur PQ
2	-3	2
3	-2.5	2
4	-2	2
5	-1.5	2
6	-1	2
7	-0.5	2
8	0	2
9	0.5	2
10	1	2
11	1.5	2
12	2	2
13	2.5	2
14		

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées de manière indépendante.

1. Démontrer que la tangente en M à C_f est perpendiculaire à la tangente en N à C_g.

2.

a. Que peut-on conjecturer pour la longueur PQ ?

b. Démontrer cette conjecture.

EXERCICE 3

[Antilles-Guyane 2017]

1. **Démontrons que la tangente en M à Cf est perpendiculaire à la tangente en N à Cg:**

Soient: • $y = ax + b$, l'équation de la tangente **(D)** en M à Cf,

• $y = cx + d$, l'équation de la tangente **(D')** en N à Cg.

D'après le cours: • **D et D' sont parallèles ssi** $a = c$

• **D et D' sont perpendiculaires ssi** $a \times c = -1$.

Ici, il s'agit donc de déterminer les équations respectives des 2 tangentes.

L'équation de la tangente en M à Cf:

• Ici: • $f(x) = e^x$

• $Df = \mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction " exponentielle ".

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = e^x$.

• **(D)** est tangente à Cf au point $M(a; f(a))$ cad $M(a; e^a)$.

• D'où, l'équation de la droite **(D)** est:

$y - y_M = f'(M)(x - x_M) \iff y - e^a = f'(a)(x - a)$

$\Rightarrow y = e^a \times x + e^a(1 - a)$.

Ainsi: • l'équation de la tangente **(D)** est: $y = e^a \times x + e^a (1 - a)$,

• **(D)** a pour coefficient directeur: e^a.

L'équation de la tangente en N à Cg:

• Ici: • $g(x) = e^{-x}$

• $Dg = \mathbb{R}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction " exponentielle ".

Ainsi, nous pouvons calculer g' pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = -e^{-x}$.

• **(D')** est tangente à Cg au point $N(a; g(a))$ cad $N(a; e^{-a})$.

• D'où, l'équation de la droite **(D')** est:

$y - y_N = f'(N)(x - x_N) \iff y - e^{-a} = g'(a)(x - a)$

$\Rightarrow y = (-e^{-a}) \times x + e^{-a}(1 + a)$.

Ainsi: • l'équation de la tangente **(D')** est: $y = (-e^{-a}) \times x + e^{-a}(1 + a)$,

• **(D')** a pour coefficient directeur: $-e^{-a}$.

Au total, comme: $(e^a) \times (-e^{-a}) = -1$, **D** $\perp$ **D'**.

2. a. Que peut-on conjecturer pour la longueur PQ ?

La conjecture que nous pouvons émettre sur la longueur PQ est:

" a priori, il semble, que pour tout réel a, la longueur PQ est constante et égale à 2 ".

2. b. Démontrons cette conjecture:

Il s'agit ici de montrer que, pour tout réel a, la longueur PQ = 2.

Pour ce faire, nous devons déterminer les coordonnées des points P et Q.

D'après **1.**: • l'équation de la tangente est: $y = e^{a} \times x + e^{a}(1 - a)$ (1)

• l'équation de la tangente est: $y = (-e^{-a}) \times x + e^{-a}(1 + a)$. (2)

Or: • $y_p = 0 \Rightarrow x_p = a - 1$, d'après (1),

• $y_q = 0 \Rightarrow x_q = 1 + a$, d'après (2).

Et donc, la longueur PQ est: $PQ = |x_q - x_p| \Rightarrow PQ = 2$.

Au total, pour tout réel a, nous avons toujours: PQ = 2.