# Corrigé

# Exercice 5

freemaths.fr

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

## MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : **7**

***Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7 dont une ANNEXE qui n'est pas à rendre.***

*Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.*

*Le sujet est composé de cinq exercices indépendants.*
*Le candidat doit traiter tous les exercices.*
*Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*
*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

obligatoire


freemaths.fr freemaths.fr

**Exercice 5** (5 *points*)

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

On note **R** l'ensemble des nombres réels.
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
On considère les points $A(-1;2;0)$, $B(1;2;4)$ et $C(-1;1;1)$.

**1.**
- **a.** Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
- **b.** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
- **c.** En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré.

**2.** Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.
- **a.** Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
- **b.** Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

**3.** Soient $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $3x+y-2z+3=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan passant par O et parallèle au plan d'équation $x-2z+6=0$.
- **a.** Démontrer que le plan $\mathscr{P}_2$ a pour équation $x=2z$.
- **b.** Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
- **c.** Soit la droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations paramétriques est
$$\begin{cases}x=2t\\y=-4t-3,\ t\in\mathbf{R}\\z=t\end{cases}.$$
Démontrer que $\mathscr{D}$ est l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

**4.** Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.

# EXERCICE 5

## [ Antilles-Guyane 2017 ]

**1. a. Montrons que les points A, B et C ne sont pas alignés:**

D'après le cours: les points A, B et C sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Ici: A (- 1; 2; 0), B (1; 2; 4) et C (- 1; 1; 1).

D'où: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Or, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ssi il existe un réel $\alpha$ tel que: $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} 2 = 0 \cdot (\alpha) \\ 0 = -1 \cdot (\alpha) \\ 4 = 1 \cdot (\alpha) \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = 0 \\ 0 = -\alpha \\ 4 = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 0 \\ \alpha = 0. \\ \alpha = 4 \end{cases}$$

Ainsi, il n'existe pas de réel $\alpha$ tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC}$: les points A, B et C ne sont donc pas alignés.

**1. b. Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$:**

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (2 \times 0) + (0 \times -1) + (4 \times 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$.

D'où: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$.

**1. c. Déterminons la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré:**

D'après le cours, nous savons que: $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC}$.

Ici: • $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$,

• $AB^2 = 2^2 + 0^2 + 4^2 \iff AB^2 = 20 \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$,

• $AC^2 = 0^2 + (-1)^2 + 1^2 \iff AC^2 = 2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}$.

Dans ces conditions: $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{4}{(2\sqrt{5}) \times (\sqrt{2})} \Rightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

A l'aide de la machine à calculer, nous trouvons: $\widehat{BAC} \approx 51°$.

**2. a. Montrons que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC):**

D'après le cours: **un vecteur $\vec{n}$ (a; b; c) est normal à un plan ssi ce vecteur est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.**

Ici: • il s'agit du plan (ABC);

• 2 vecteurs non colinéaires de ce plan sont: $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ **(1. a.)**;

• $\vec{n}$ (2; - 1; - 1).

De plus: • $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux car: $(2 \times 2) + (-1 \times 0) + (-1 \times 4) = 0$;

• $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux car: $(2 \times 0) + (-1 \times (-1)) + (-1 \times 1) = 0$.

Par conséquent: $\vec{n}$ est bien orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan. Donc $\vec{n}$ (2; - 1; - 1) est un vecteur normal au plan (ABC).

**2. b. Déterminons une équation cartésienne du plan (ABC):**

Ici: • $\vec{n}$ ($a = 2$; $b = -1$; $c = -1$);

• A (- 1; 2; 0) est un point de l'espace.

D'où, une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est: $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$\iff 2 \times (x + 1) - 1 \times (y - 2) - 1 \times (z - 0) = 0$

$\Rightarrow 2x - y - z = -4.$

En conclusion, une équation cartésienne du plan (ABC) est: $2x - y - z = -4.$

**3. a. Démontrons que le plan $\mathcal{P}_2$ a pour équation $x = 2z$:**

Soit **P**, le plan d'équation: $x - 2z + 6 = 0.$

Un vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ de ce plan **P** est: $\vec{n}(1; 0; -2).$

Donc un vecteur normal du plan $\mathcal{P}_2$ est aussi: **$\vec{n}(1; 0; -2)$, car les plans P et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.**

D'où, une équation cartésienne du plan passant par O (0; 0; 0) et de vecteur normal $\vec{n}$ est: $a(x - 0) + b(y - 0) + c(z - 0) = 0$

$\iff 1 \times (x - 0) + 0 \times (y - 0) - 2(z - 0) = 0$

$\Rightarrow x - 2z = 0$ **ou** $x = 2z.$

En conclusion: $\mathcal{P}_2$ a bien pour équation $x = 2z.$

**3. b. Montrons que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants:**

$\mathcal{P}_1$ a pour équation: $3x + y - 2z + 3 = 0.$

$\mathcal{P}_2$ a pour équation: $x - 2z = 0.$

L'intersection des deux plans, si elle existe, vérifie le système:

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = -3 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + y - x = -3 \\ x = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x - 3 \\ x = 2z \end{cases}.$$

Ainsi, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont bien sécants car le système est possible, et leur intersection est: la droite d'équation $y = -2x - 3$ ($\Delta$).

**3. c. Démontrons que $\mathcal{D}$ est la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$:**

La droite $\mathcal{D}$ a pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -4t - 3 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Nous pouvons alors écrire:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -4t - 3 \\ z = t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2t \\ y = -4t - 3 \\ x = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = -2x - 3. \\ x = 2z \end{cases}$$

Ainsi, l'équation de la droite $\mathcal{D}$ est: $y = -2x - 3$.

Au total, comme l'équation de la droite $\mathcal{D}$ est identique à celle de $\Delta$, nous pouvons affirmer que: $\mathcal{D}$ est la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

**4. Montrons que la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan (ABC) au point $I$:**

La droite $\mathcal{D}$ a pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -4t - 3 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Soit $I\ (x_I ; y_I ; z_I)$, un point appartenant à la droite $\mathcal{D}$.

$I$ appartient aussi au plan (ABC) ssi ses coordonnées vérifient:

$$2x - y - z = -4 \ \textbf{(2. b.)}.$$

$2x_I - y_I - z_I = -4 \iff 2 \times (2t) - (-4t - 3) - t = -4 \implies t = -1.$

Dans ces conditions, les coordonnées du point $I$ sont:

$$\begin{cases} x_I = -2 \\ y_I = 1 \\ z_I = -1 \end{cases}.$$

Au total, la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan (ABC) au point: $I\ (-2 ; 1 ; -1)$.