Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : **7**

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7
dont une ANNEXE qui n'est pas à rendre.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de cinq exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 2 (4 *points*)

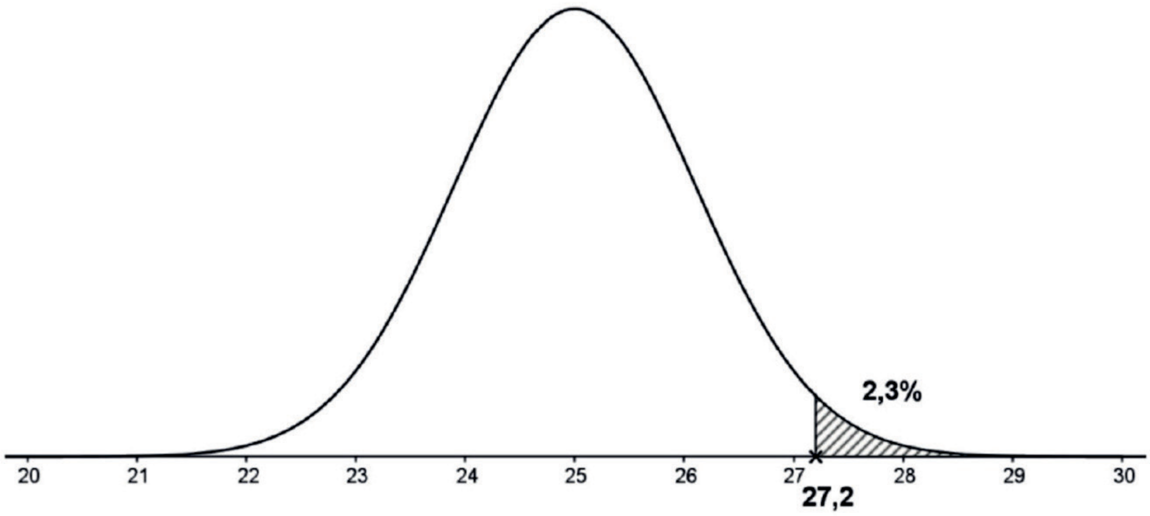
Commun à tous les candidats

Dans une usine automobile, certaines pièces métalliques sont recouvertes d'une fine couche de nickel qui les protège contre la corrosion et l'usure. Le procédé utilisé est un nickelage par électrolyse.

On admet que la variable aléatoire X, qui à chaque pièce traitée associe l'épaisseur de nickel déposé, suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 25$ micromètres (µm) et d'écart type σ_1.

Une pièce est conforme si l'épaisseur de nickel déposé est comprise entre 22,8 µm et 27,2 µm.

La fonction de densité de probabilité de X est représentée ci-dessous.
On a pu déterminer que $P(X > 27{,}2) = 0{,}023$.



1.

a. Déterminer la probabilité qu'une pièce soit conforme.
b. Justifier que 1,1 est une valeur approchée de σ_1 à 10^{-1} près.
c. Sachant qu'une pièce est conforme, calculer la probabilité que l'épaisseur de nickel déposé sur celle-ci soit inférieure à 24 µm. Arrondir à 10^{-3}.

2. Une équipe d'ingénieurs propose un autre procédé de nickelage, obtenu par réaction chimique sans aucune source de courant. L'équipe affirme que ce nouveau procédé permet théoriquement d'obtenir 98 % de pièces conformes.
La variable aléatoire Y qui, à chaque pièce traitée avec ce nouveau procédé, associe l'épaisseur de nickel déposé suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 25$ µm et d'écart-type σ_2.

a. En admettant l'affirmation ci-dessus, comparer σ_1 et σ_2.
b. Un contrôle qualité évalue le nouveau procédé ; il révèle que sur 500 pièces testées, 15 ne sont pas conformes.
Au seuil de 95 %, peut-on rejeter l'affirmation de l'équipe d'ingénieurs ?

EXERCICE 2

[Antilles-Guyane 2017]

1. a. Déterminons la probabilité qu'une pièce soit conforme:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 25$ µm et d'écart type $\sigma_1 = ?$
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de calculer: $P(22,8 \leqslant X \leqslant 27,2)$.

$$P(22,8 \leqslant X \leqslant 27,2) = P(X \leqslant 27,2) - P(X \leqslant 22,8)$$

$$= (1 - P(X \geqslant 27,2)) - P(X \leqslant 22,8)$$

$$= (1 - P(X \geqslant 27,2)) - P(X \geqslant 27,2)$$

$$= 1 - 2 \times P(X \geqslant 27,2)$$

$$\approx 0,954 \quad \text{car:} \quad P(X > 27,2) = P(X \geqslant 27,2) = 0,023.$$

Au total, la probabilité qu'une pièce soit conforme est d'environ: 95, 4%.

1. b. Justifions que 1, 1 est une valeur approchée de σ_1:

Nous savons que: $P(\mu_1 - 2\sigma_1 \leqslant X \leqslant \mu_1 + 2\sigma_1) \approx 0,954$.

Ici, nous avons: $P(22,8 \leqslant X \leqslant 27,2) \approx 0,954$.

Par identification, nous savons:

$$\begin{cases} \mu_1 - 2\sigma_1 = 22,8 \\ \mu_1 + 2\sigma_1 = 27,2 \end{cases} \Rightarrow \sigma_1 \approx 1,1 \ \mu m.$$

Au total, nous avons bien: $\sigma_1 \approx 1,1 \ \mu m$.

1. c. Calculons la probabilité que l'épaisseur de nickel déposé sur celle-ci soit inférieure à 24 µm:

Il s'agit de calculer: $P_1 = P_{[22,8 \leqslant X \leqslant 27,2]}(X \leqslant 24)$.

$$P_1 = P_{[22,8 \leqslant X \leqslant 27,2]}(X \leqslant 24) = \frac{P((22,8 \leqslant X \leqslant 27,2) \cap (X \leqslant 24))}{P(22,8 \leqslant X \leqslant 27,2)}$$

$$= \frac{P(22,8 \leqslant X \leqslant 24)}{0,954}.$$

Or: $P(22,8 \leqslant X \leqslant 24) = P\left(\frac{22,8 - \mu_1}{\sigma_1} \leqslant \frac{X - \mu_1}{\sigma_1} \leqslant \frac{24 - \mu_1}{\sigma_1}\right)$

$$= P\left(\frac{22,8 - 25}{1,1} \leqslant T \leqslant \frac{24 - 25}{1,1}\right)$$

$$= P(-2 \leqslant T \leqslant -0,909)$$

$$= P(T \leqslant -0,909) - P(T \leqslant -2)$$

$$= (1 - P(T \leqslant 0,909)) - (1 - P(T \leqslant 2))$$

$$= P(T \leqslant 2) - P(T \leqslant 0,909).$$

Ainsi: $P_1 = \dfrac{P(T \leqslant 2) - P(T \leqslant 0,909)}{0,954}$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P_1 \approx 0,167.$$

Au total, la probabilité que l'épaisseur de nickel déposé sur celle-ci soit inférieure à 24 µm est d'environ: 16, 7%.

2. a. Comparons σ_1 et σ_2:

Nous savons que:

- Y suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 25$ µm et d'écart type $\sigma_2 = ?$
- $\sigma_1 = 1,1$.
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de déterminer σ_2 afin de le comparer avec σ_1.

Or: $P(22,8 \leqslant Y \leqslant 27,2) = 98\%$ car une pièce est conforme si l'épaisseur de nickel déposé est comprise entre 22, 8 µm et 27, 2 µm.

$$P(22,8 \leqslant Y \leqslant 27,2) = 98\% \iff P\left(\frac{22,8-\mu_2}{\sigma_2} \leqslant \frac{Y-\mu_2}{\sigma_2} \leqslant \frac{27,2-\mu_2}{\sigma_2}\right) = 98\%$$

$$\iff P\left(\frac{22,8-25}{\sigma_2} \leqslant T \leqslant \frac{27,2-25}{\sigma_2}\right) = 98\%$$

$$\iff P\left(\frac{-2,2}{\sigma_2} \leqslant T \leqslant \frac{2,2}{\sigma_2}\right) = 98\%$$

$$\iff 2P\left(\frac{2,2}{\sigma_2}\right) - 1 = 98\%$$

$$\iff P\left(\frac{2,2}{\sigma_2}\right) = 99\%.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{2,2}{\sigma_2} \approx 2,325 \Rightarrow \sigma_2 \approx 0,946.$$

Au total: $\sigma_2 \approx 0,946 < \sigma_1$, avec $\sigma_1 = 1,1$.

2. b. Au seuil de 95%, peut-on rejeter l'affirmation de l'équipe d'ingénieurs ?

Ici, nous avons: • $n = 500$

• $p = 98\%$

• $f = \dfrac{485}{500} \Rightarrow f = 97\%$.

$(485 = 500 - 15)$

Dans ces conditions:

$n = 500 \geqslant 30$, $n \cdot p = 490 \geqslant 5$ et $n \cdot (1 - p) = 10 \geqslant 5$.

Les conditions sont donc réunies.

On choisit un échantillon aléatoire de 500 pièces traitées avec ce nouveau procédé.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right],$$

cad: $I = \left[0,98 - 1,96 \times \sqrt{\dfrac{0,98 \times 0,02}{500}} ; 0,98 + 1,96 \times \sqrt{\dfrac{0,98 \times 0,02}{500}} \right]$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [\, 96,7\% ; 99,3\% \,]$.

Or la fréquence observée de pièces conformes " f ", dans l'échantillon, est telle que: $f = 97\% \in I$.

Ainsi, au seuil de 95%, nous ne pouvons pas rejeter l'affirmation de l'équipe d'ingénieurs.