EXERCICE 4

[Antilles-Guyane 2016]

Partie A:

1. Recopions et complétons l'algorithme:

L'algorithme complété est le suivant:

```
Début:  Pour X variant de - 5 à 10
            (1)  Pour Y variant de - 5 à 10
                 (2)  Si 7 * X - 3 * Y = 1
                      Alors Afficher X et Y
                      Fin Si
            Fin Pour
        Fin Pour
```

2. a. Donnons une solution particulière de l'équation (E):

(a, b) est une solution particulière de l'équation (E) ssi: $7 \times a - 3 \times b = 1$.

Prenons $(1, 2)$, nous avons: $7 \times 1 - 3 \times 2 = 1$.

Au total: $(1, 2)$ est une solution particulière de l'équation (E).

2. b. Déterminons l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E):

2. b. b1. • Supposons que le couple (x, y) soit solution de (E).

Dans ces conditions: $7 \times x - 3 \times y = 1$ (1).

Le couple (1, 2) est une solution particulière de (E).

D'où: $7 \times 1 - 3 \times 2 = 1$ (2).

$(1) - (2) \iff (7 \times x - 3 \times y) - (7 \times 1 - 3 \times 2) = 1 - 1$

$\iff 7(x - 1) - 3(y - 2) = 0$

$\Rightarrow 7(x - 1) = 3(y - 2).$

• Inversement, si le couple (x, y) vérifie $7(x - 1) = 3(y - 2)$

alors: $7x - 7 = 3y - 6 \iff 7x - 3y = 1.$

Cela signifie que le couple (x, y) est solution de (E).

Au total, le couple (x, y) est solution de (E) ssi: $7(x - 1) = 3(y - 2).$

2. b. b2. • Si $7(x - 1) = 3(y - 2)$, alors 7 divise $3(y - 2)$.

Comme 7 et 3 sont premiers entre eux, d'après **le théorème de GAUSS**, 7 divise $(y - 2)$.

Nous pouvons alors écrire: $y - 2 = 7 \times k$, $k \in \mathbb{Z}$.

D'où: $7(x - 1) = 3(y - 2) \iff 7(x - 1) = 3(7 \times k)$

$\iff x - 1 = 3 \times k$

$\iff x = 1 + 3 \times k$ et $y - 2 = 7 \times k.$

Ainsi: $x = 1 + 3k$ et par conséquent $y = 2 + 7 \times k$, $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est donc:

$$\{ (1 + 3k, 2 + 7k), k \in \mathbb{Z} \}.$$

- Inversement, si $a = 1 + 3k$ et $b = 2 + 7k, k \in \mathbb{Z}$:

$7x - 3y = 7(1 + 3k) - 3(2 + 7k) \iff 7x - 3y = 1.$

Et donc, le couple (x, y) est solution de l'équation (E).

Au total, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est:

$$\{ (1 + 3k, 2 + 7k), k \in \mathbb{Z} \}.$$

2. c. Déterminons l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) tels que $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et $-5 \leqslant y \leqslant 10$:

(x, y) est solution de (E) et vérifie $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et $-5 \leqslant y \leqslant 10$

se traduit par: $\begin{cases} -5 \leqslant 1 + 3k \leqslant 10 \\ -5 \leqslant 2 + 7k \leqslant 10 \end{cases}$ (3).

$$(3) \iff \begin{cases} -6 \leqslant 3k \leqslant 9 \\ -7 \leqslant 7k \leqslant 8 \end{cases} \iff \begin{cases} -2 \leqslant k \leqslant 3 \\ -1 \leqslant k \leqslant \dfrac{8}{7} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} -1 \leqslant k \leqslant \dfrac{8}{7} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Comme $k \in \mathbb{Z}$, il y a 3 valeurs possibles pour k: $k = -1$, $k = 0$ et $k = 1$.

Au total, l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) avec $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et $-5 \leqslant y \leqslant 10$ est:

$(1 + 3(-1), 2 + 7(-1)), (1 + 3(0), 2 + 7(0))$ et $(1 + 3(1), 2 + 7(1))$,

cad les couples: $(-2, -5), (1, 2)$ et $(4, 9)$.

Partie B:

1. a. Montrons que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = M \cdot X_n$:

Pour tout entier naturel n, nous avons:

$$M \cdot X_n = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{35}{2} & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} x_n + 3y_n \\ -\frac{35}{2} x_n + 8y_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Au total, nous avons bien, pour tout entier naturel n: $X_{n+1} = M \cdot X_n$.

1. b. Exprimons X_n en fonction de M^n et X_0:

D'après le cours, nous pouvons écrire, pour tout entier naturel n:

$$X_n = M^n \cdot X_0.$$

2. a. Vérifions que $P^{-1} M P$ est une matrice diagonale D que l'on déterminera:

$$P^{-1} M P = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{35}{2} & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 - 15 & \frac{39}{2} - 21 \\ 35 - 40 & \frac{105}{2} - 56 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{2} \\ -5 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -14 + 15 & -\frac{21}{2} + \frac{21}{2} \\ 10 - 10 & \frac{15}{2} - \frac{14}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} M P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Au total, $P^{-1} M P$ est bien une matrice diagonale D, avec: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. b. Donnons D^n, pour tout entier naturel n:

D'après le cours, nous pouvons écrire, pour tout entier naturel n:

$$D^n = P^{-1} \cdot M^n \cdot P \quad \text{cad} \quad D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

2. c. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$:

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $M^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$ ".

Initialisation: • $M^0 = P \cdot D^0 \cdot P^{-1}$?

$$P \cdot D^0 \cdot P^{-1} = P \cdot I_2 \cdot P^{-1}$$
$$= P \cdot P^{-1}$$
$$= I_2.$$

Or $M^0 = I_2$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $M^1 = P \cdot D^1 \cdot P^{-1}$?

$$P \cdot D^1 \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -\frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{35}{2} & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Or } M^1 = M = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{35}{2} & 8 \end{pmatrix}.$$

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$
et montrons qu'alors: $M^{n+1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}$.

Supposons: $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

(1) => $M^n \times M = P \times D^n \times P^{-1} \times M$

=> $M^{n+1} = P \times D^n \times P^{-1} \times P \times D \times P^{-1}$

=> $M^{n+1} = P \times D^n \times (P^{-1} \times P) \times D \times P^{-1}$

=> $M^{n+1} = P \times D^n \times I_2 \times D \times P^{-1}$

=> $M^{n+1} = P \times D^n \times D \times P^{-1}$

=> $M^{n+1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, nous avons:

$$M^n = P \times D^n \times P^{-1}.$$

3. Déduisons-en une expression de x_n et y_n en fonction de n:

D'après la question **1. b.**, $X_n = M^n \cdot X_0$.

D'où: $X_n = M^n \cdot X_0 \iff X_n = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & 6 - \frac{6}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & 15 - \frac{14}{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\iff X_n = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & + 12 - \frac{12}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & + 30 - \frac{28}{2^n} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X_n = \begin{pmatrix} -2 + \frac{3}{2^n} \\ -5 + \frac{7}{2^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

En conclusion, pour tout entier naturel n: $x_n = -2 + \frac{3}{2^n}$ et $y_n = -5 + \frac{7}{2^n}$.

4. Montrons que le point $A_n \in \mathcal{D}$:

$A_n \in \mathcal{D}$ ssi: $7x_n - 3y_n = 1$.

Or: $7x_n - 3y_n = 7\left(-2 + \frac{3}{2^n}\right) - 3\left(-5 + \frac{7}{2^n}\right)$

$$= -14 + \frac{21}{2^n} + 15 - \frac{21}{2^n} = 1.$$

Ainsi: le point A_n (x_n, y_n) appartient bien à la droite $\mathcal{D}$.