Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

B A C C A L A U R É A T   G É N É R A L

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

spécialité

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : **9**

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 4 (*5 points*)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère l'équation suivante d'inconnues x et y entiers relatifs :

$$7x - 3y = 1 \quad (E).$$

1. Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Le recopier et le compléter, en écrivant ses lignes manquantes (1) et (2) de manière à ce qu'il donne les solutions entières $(x\,;y)$ de l'équation (E) vérifiant $-5 \leq x \leq 10$ et $-5 \leq y \leq 10$.

```
Variables :   X est un nombre entier
              Y est un nombre entier
Début :       Pour X variant de −5 à 10
                   (1)……………………………………
                        (2)……………………………………
                        Alors    Afficher X et Y
                        Fin Si
                   Fin Pour
              Fin Pour
Fin.
```

2.

a. Donner une solution particulière de l'équation (E).

b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

c. Déterminer l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) tels que $-5 \leq x \leq 10$ et $-5 \leq y \leq 10$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation

$$7x-3y-1=0\ .$$

On définit la suite (A_n) de points du plan de coordonnées $(x_n;y_n)$ vérifiant pour tout n entier naturel :

$$\begin{cases} x_0=1\\ y_0=2\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n+1}=\dfrac{-13}{2}x_n+3y_n\\ y_{n+1}=\dfrac{-35}{2}x_n+8y_n\end{cases}\ .$$

1. On note M la matrice $\begin{pmatrix} \frac{-13}{2} & 3\\ \frac{-35}{2} & 8\end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on pose $X_n=\begin{pmatrix} x_n\\ y_n\end{pmatrix}$.

- **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1}=MX_n$.
- **b.** Sans justifier, exprimer pour tout entier naturel n, X_n en fonction de M^n et X_0.

2. On considère la matrice $P=\begin{pmatrix} -2 & -3\\ -5 & -7\end{pmatrix}$ et on admet que la matrice inverse de P, notée P^{-1}, est définie par $P^{-1}=\begin{pmatrix} 7 & -3\\ -5 & 2\end{pmatrix}$.

- **a.** Vérifier que $P^{-1}\,M\,P$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.
- **b.** Pour tout entier naturel n, donner D^n sans justification.
- **c.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n=P\,D^nP^{-1}$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n, $M^n=\begin{pmatrix} -14+\frac{15}{2^n} & 6-\frac{6}{2^n}\\ -35+\frac{35}{2^n} & 15-\frac{14}{2^n}\end{pmatrix}$.

En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de x_n et de y_n en fonction de n.

4. Montrer que, pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite $\mathscr{D}$.

EXERCICE 4

[Antilles-Guyane 2016]

Partie A:

1. **Recopions et complétons l'algorithme:**

L'algorithme complété est le suivant:

```
Début:  Pour X variant de - 5 à 10
            (1)  Pour Y variant de - 5 à 10
                 (2)  Si 7 * X - 3 * Y = 1
                      Alors Afficher X et Y
                      Fin Si
            Fin Pour
        Fin Pour
```

2. a. **Donnons une solution particulière de l'équation (E):**

(a, b) est une solution particulière de l'équation (E) ssi: $7 \times a - 3 \times b = 1$.

Prenons (1, 2), nous avons: $7 \times 1 - 3 \times 2 = 1$.

Au total: (1, 2) est une solution particulière de l'équation (E).

2. b. Déterminons l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E):

2. b. b1. • Supposons que le couple (x, y) soit solution de (E).

Dans ces conditions: $7 \times x - 3 \times y = 1$ (1).

Le couple (1, 2) est une solution particulière de (E).

D'où: $7 \times 1 - 3 \times 2 = 1$ (2).

(1) - (2) <=> $(7 \times x - 3 \times y) - (7 \times 1 - 3 \times 2) = 1 - 1$

<=> $7(x - 1) - 3(y - 2) = 0$

=> $7(x - 1) = 3(y - 2)$.

• Inversement, si le couple (x, y) vérifie $7(x - 1) = 3(y - 2)$

alors: $7x - 7 = 3y - 6$ <=> $7x - 3y = 1$.

Cela signifie que le couple (x, y) est solution de (E).

Au total, le couple (x, y) est solution de (E) ssi: $7(x - 1) = 3(y - 2)$.

2. b. b2. • Si $7(x - 1) = 3(y - 2)$, alors 7 divise $3(y - 2)$.

Comme 7 et 3 sont premiers entre eux, d'après **le théorème de GAUSS**, 7 divise $(y - 2)$.

Nous pouvons alors écrire: $y - 2 = 7 \times k$, $k \in \mathbb{Z}$.

D'où: $7(x - 1) = 3(y - 2)$ <=> $7(x - 1) = 3(7 \times k)$

<=> $x - 1 = 3 \times k$

<=> $x = 1 + 3 \times k$ et $y - 2 = 7 \times k$.

Ainsi: $x = 1 + 3k$ et par conséquent $y = 2 + 7 \times k$, $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est donc:

$$\{(1+3k, 2+7k), k \in \mathbb{Z}\}.$$

- Inversement, si $a = 1 + 3k$ et $b = 2 + 7k$, $k \in \mathbb{Z}$:

$7x - 3y = 7(1+3k) - 3(2+7k) \iff 7x - 3y = 1.$

Et donc, le couple (x, y) est solution de l'équation (E).

Au total, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est:

$$\{(1+3k, 2+7k), k \in \mathbb{Z}\}.$$

2. c. Déterminons l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) tels que $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et $-5 \leqslant y \leqslant 10$:

(x, y) est solution de (E) et vérifie $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et $-5 \leqslant y \leqslant 10$

se traduit par: $\begin{cases} -5 \leqslant 1 + 3k \leqslant 10 \\ -5 \leqslant 2 + 7k \leqslant 10 \end{cases}$ (3).

$$(3) \iff \begin{cases} -6 \leqslant 3k \leqslant 9 \\ -7 \leqslant 7k \leqslant 8 \end{cases} \iff \begin{cases} -2 \leqslant k \leqslant 3 \\ -1 \leqslant k \leqslant \dfrac{8}{7} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 \leqslant k \leqslant \dfrac{8}{7} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Comme $k \in \mathbb{Z}$, il y a 3 valeurs possibles pour k: $k = -1$, $k = 0$ et $k = 1$.

Au total, l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) avec $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et $-5 \leqslant y \leqslant 10$ est:

$(1 + 3(-1), 2 + 7(-1))$, $(1 + 3(0), 2 + 7(0))$ et $(1 + 3(1), 2 + 7(1))$,

cad les couples: $(-2, -5)$, $(1, 2)$ et $(4, 9)$.

Partie B:

1. a. Montrons que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = M \cdot X_n$:

Pour tout entier naturel n, nous avons:

$$M \cdot X_n = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{35}{2} & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} x_n + 3y_n \\ -\frac{35}{2} x_n + 8y_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Au total, nous avons bien, pour tout entier naturel n: $X_{n+1} = M \cdot X_n$.

1. b. Exprimons X_n en fonction de M^n et X_0:

D'après le cours, nous pouvons écrire, pour tout entier naturel n:

$$X_n = M^n \cdot X_0.$$

2. a. Vérifions que $P^{-1} M P$ est une matrice diagonale D que l'on déterminera:

$$P^{-1} M P = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{35}{2} & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 - 15 & \frac{39}{2} - 21 \\ 35 - 40 & \frac{105}{2} - 56 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{2} \\ -5 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -14 + 15 & -\frac{21}{2} + \frac{21}{2} \\ 10 - 10 & \frac{15}{2} - \frac{14}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} M P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Au total, $P^{-1} M P$ est bien une matrice diagonale D, avec: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. b. Donnons D^n, pour tout entier naturel n:

D'après le cours, nous pouvons écrire, pour tout entier naturel n:

$$D^n = P^{-1} \cdot M^n \cdot P \text{ cad } D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

2. c. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$:

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $M^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$ ".

Initialisation: • $M^0 = P \cdot D^0 \cdot P^{-1}$?

$$P \cdot D^0 \cdot P^{-1} = P \cdot I_2 \cdot P^{-1}$$
$$= P \cdot P^{-1}$$
$$= I_2.$$

Or $M^0 = I_2$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $M^1 = P \cdot D^1 \cdot P^{-1}$?

$$P \cdot D^1 \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -\frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{35}{2} & 8 \end{pmatrix}.$$

Or $M^1 = M = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & 3 \\ -\frac{35}{2} & 8 \end{pmatrix}$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$ et montrons qu'alors: $M^{n+1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}$.

Supposons: $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

(1) => $M^n \times M = P \times D^n \times P^{-1} \times M$

=> $M^{n+1} = P \times D^n \times P^{-1} \times P \times D \times P^{-1}$

=> $M^{n+1} = P \times D^n \times (P^{-1} \times P) \times D \times P^{-1}$

=> $M^{n+1} = P \times D^n \times I_2 \times D \times P^{-1}$

=> $M^{n+1} = P \times D^n \times D \times P^{-1}$

=> $M^{n+1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, nous avons:

$$M^n = P \times D^n \times P^{-1}.$$

3. Déduisons-en une expression de x_n et y_n en fonction de n:

D'après la question **1. b.**, $X_n = M^n \cdot X_0$.

D'où: $X_n = M^n \cdot X_0 \iff X_n = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & 6 - \frac{6}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & 15 - \frac{14}{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\iff X_n = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} + 12 - \frac{12}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} + 30 - \frac{28}{2^n} \end{pmatrix}$$

$$\implies X_n = \begin{pmatrix} -2 + \frac{3}{2^n} \\ -5 + \frac{7}{2^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

En conclusion, pour tout entier naturel n: $x_n = -2 + \frac{3}{2^n}$ et $y_n = -5 + \frac{7}{2^n}$.

4. Montrons que le point $A_n \in \mathcal{D}$:

$A_n \in \mathcal{D}$ ssi: $7x_n - 3y_n = 1$.

Or: $7x_n - 3y_n = 7\left(-2 + \frac{3}{2^n}\right) - 3\left(-5 + \frac{7}{2^n}\right)$

$$= -14 + \frac{21}{2^n} + 15 - \frac{21}{2^n} = 1.$$

Ainsi: le point $A_n\,(x_n, y_n)$ appartient bien à la droite $\mathcal{D}$.