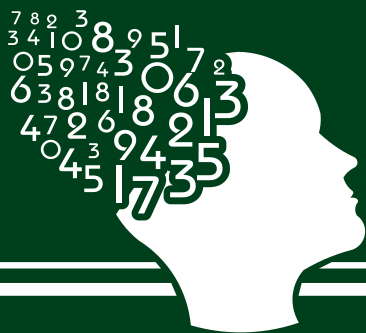


Corrigé

Exercice 3



freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série : S

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : **9**

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

*Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.*

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche,
même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements
seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

Exercice 3 (7 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = xe^{1-x^2}$.

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0, $f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$.

On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

2.

- a. On admet que f est dérivable sur \mathbf{R} et on note f' sa dérivée.

Démontrer que pour tout réel x ,

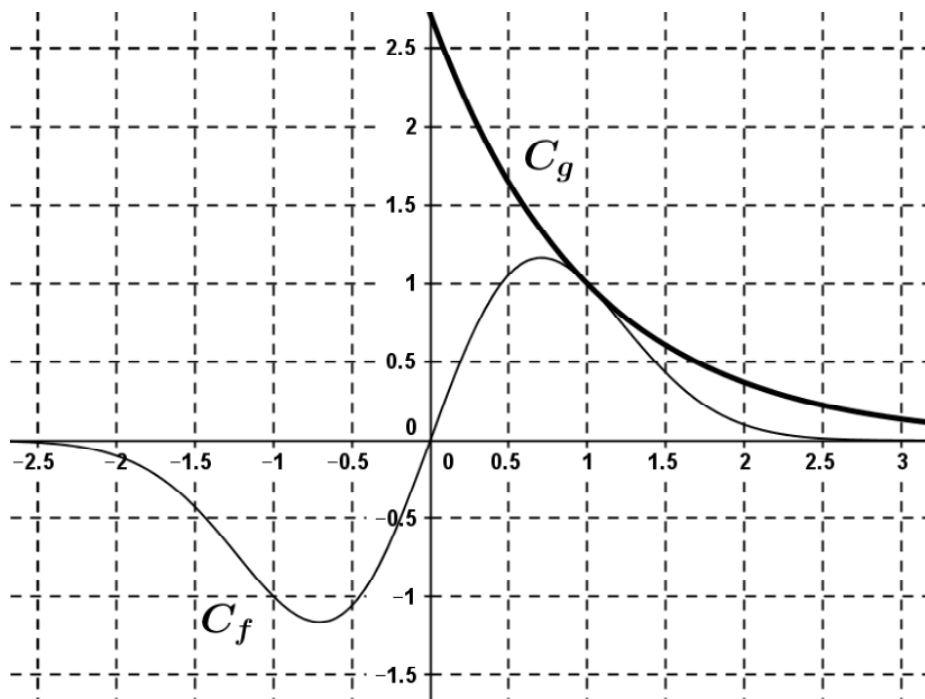
$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}.$$

- b. En déduire le tableau de variations de la fonction f .

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = e^{1-x}$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère du plan les courbes représentatives C_f et C_g respectivement des fonctions f et g .



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?
2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $] - \infty ; 0]$, $f(x) < g(x)$.
3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.

- a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) \leq g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leq 0.$$

On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

- b. On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0; +\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction Φ . (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)
 - c. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leq 0$.
- 4.
- a. La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?
 - b. Montrer que C_f et C_g ont un unique point commun, noté A.
 - c. Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

Partie C

1. Trouver une primitive F de la fonction f sur \mathbf{R} .
2. En déduire la valeur de $\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2}) dx$.
3. Interpréter graphiquement ce résultat.