

EXERCICE 3

[Antilles - Guyane 2016]

Partie A:

1. Calculons la limite de la fonction f en $+\infty$:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{1-x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}} \quad \left(x e^{1-x^2} = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}} \right). \end{aligned}$$

- Or, d'après le cours: $\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{e^u} = 0$ (Théorème des croissances comparées).

Dans ces conditions, en posant $u = x^2$:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e \times \left(\frac{1}{x} \right) \\ &= 0; \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x^2 \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0.$$

$$\text{Ainsi: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \times 0$$

$$= 0.$$

Au total: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2. a. Démontrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}$:

Ici: • $f(x) = xe^{1-x^2}$

• $Df = \mathbb{R}$.

D'après l'énoncé, f est dérivable sur \mathbb{R} .

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}: f'(x) &= (1 \times e^{1-x^2}) + (x \times (-2x) \times e^{1-x^2}) \\ &\Rightarrow f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}. \end{aligned}$$

Au total, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons bien: $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}$.

2. b. Déduisons-en le tableau de variation de f :

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

• 1^{er} cas: $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow (1 - 2x^2)e^{1-x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0, \text{ car } e^{1-x^2} > 0, \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

• 2^{eme} cas: $f'(x) < 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 &\Leftrightarrow (1 - 2x^2)e^{1-x^2} < 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - 2x^2 < 0, \text{ car } e^{1-x^2} > 0, \\ &\Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x \in \left] -\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right[\cup \left] \frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty \right[.$$

• 3^{eme} cas: $f'(x) > 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow (1 - 2x^2)e^{-x^2} > 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - 2x^2 > 0, \text{ car } e^{-x^2} > 0, \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x \in \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right[.$$

Au total: • f est décroissante sur $\left] -\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right[\cup \left] \frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty \right[$,

(car sur cet intervalle, $f'(x) \leq 0$)

• f est croissante sur $\left] -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$.

(car sur cet intervalle, $f'(x) \geq 0$)

Nous pouvons dresser alors le tableau de variation suivant:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$	
f'	-	0	+	0	-
f	a	b	c	d	

Avec: • $a = f(-\infty) \Rightarrow a \rightarrow 0$,

$$\bullet b = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow b = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{1/2},$$

$$\bullet c = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{1/2},$$

• $d = f(+\infty) \Rightarrow d \rightarrow 0$.

Partie B:

1. Quelle conjecture peut-on émettre ?

La conjecture que nous pouvons émettre est:

" la courbe de la fonction g est au dessus de celle de la fonction f " ;

" Donc, a priori, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) \geq f(x)$. "

Notons que C_g et C_f se croisent au point $(1;1)$.

2. Justifions que, pour tout $x \in]-\infty;0]$, $f(x) < g(x)$:

- Ici:
- $f(x) = xe^{1-x^2}$
 - $g(x) = e^{1-x}$
 - $Df = \mathbb{R}$ et $Dg = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g(x) > f(x) &\Leftrightarrow e^{1-x} > xe^{1-x^2} \\ &\Leftrightarrow x \frac{e^{1-x^2}}{e^{1-x}} < 1 \\ &\Leftrightarrow xe^{-x^2+x} < 1 \quad (a). \end{aligned}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc pour tout $x \in]-\infty;0]$, $e^{-x^2+x} > 0$.

Donc si $x \in]-\infty;0]$, l'inégalité (a) est toujours vérifiée.

En définitive: si $x \in]-\infty;0]$, $f(x) < g(x)$.

3. a. Montrons que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \varphi(x) \leq 0$:

- Ici:
- $f(x) = xe^{1-x^2}$
 - $g(x) = e^{1-x}$

- $\varphi(x) = \ln(x) - x^2 + x$
- $Df = Dg = D\varphi =]0; +\infty[$.

D'après la question précédente, nous pouvons écrire:

$$f(x) \leq g(x) \text{ ssi: } xe^{-x^2+x} \leq 1 \quad (a)$$

$$\text{cad: } \ln(xe^{-x^2+x}) \leq \ln(1)$$

$$\text{ou encore: } \ln(x) - x^2 + x \leq 0 \quad (x > 0)$$

$$\text{ce qui revient à: } \varphi(x) \leq 0.$$

En conclusion: pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \varphi(x) \leq 0$.

3. b. Dressons le tableau de variation de la fonction φ :

- Ici:
 - $\varphi(x) = \ln(x) - x^2 + x$
 - $D\varphi =]0; +\infty[$.

D'après l'énoncé, φ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer φ' pour tout $x \in]0; +\infty[$.

$$\text{Pour tout } x \in]0; +\infty[: \quad \varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1.$$

$$\text{Ainsi, pour tout } x \in]0; +\infty[: \quad \varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1.$$

- Nous allons distinguer 3 cas, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

- **1^{er} cas:** $\varphi'(x) = 0$.

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + x + 1 = 0 \quad (x \neq 0)$$

$$\text{cad ssi: } x = 1, \text{ car } x = -\frac{1}{2} \notin]0; +\infty[.$$

• 2^{eme} cas: $\varphi'(x) < 0$.

$$\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow -2x^2 + x + 1 < 0$$

$$\text{cad ssi: } x \in]1; +\infty[.$$

• 3^{eme} cas: $\varphi'(x) > 0$.

$$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x^2 + x + 1 > 0$$

$$\text{cad ssi: } x \in]0; 1[.$$

Au total: • φ est décroissante sur $]1; +\infty[$,
(car sur cet intervalle, $\varphi'(x) \leq 0$)

• φ est croissante sur $]0; 1[$,
(car sur cet intervalle, $\varphi'(x) \geq 0$)

• Nous pouvons dresser alors le tableau de variation suivant:

x	0	1	$+\infty$
φ'		+	0 -
φ		a	b c

Avec: • $a = \dots$,

• $b = 0$,

• $c = \dots$

3. c. Déduisons-en que, pour tout réel $x > 0$, $\varphi(x) \leq 0$:

Le maximum de la fonction φ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ est atteint quand: $x_{\max} = 1$.

Dans ce cas: $\varphi_{\max}(x_{\max}) = 0$ (b sur le tableau de variation).

Au total, comme $\varphi_{\max}(x_{\max}) = 0$, nous pouvons affirmer que:

$$\text{pour tout } x > 0, \quad \varphi(x) \leq 0.$$

4. a. " A priori, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g(x) \geq f(x)$ " ?

À la question précédente, nous avons vu que: $\varphi(x) \leq 0$, pour tout $x \in]0; +\infty[$.

Or: $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.

D'où: $f(x) - g(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq g(x)$.

Au total, oui la conjecture est valide car: pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g(x) \geq f(x)$.

Cela confirme bien que la courbe de la fonction g est au dessus de celle de la fonction f .

4. b. Montrons que C_f et C_g ont un unique point commun:

Ici: • $f(x) = x e^{1-x^2}$

• $g(x) = e^{1-x}$

• $Df = Dg =]0; +\infty[$.

Le point d'intersection des courbes C_f et C_g est tel que:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \varphi(x) = 0.$$

Or, $\varphi(x) = 0$ quand: $x = 1$.

Ainsi, les courbes C_f et C_g ont un unique point commun:

le point $A(1; f(1))$ ou $A(1; g(1))$, cad: $A(1; 1)$.

4. c. Montrons qu'au point A, les deux courbes ont la même tangente:

Pour répondre à cette question, il suffit de montrer qu'au point A(1;1):

$$f'(A) = g'(A).$$

Or nous savons que: • $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}$

$$• g'(x) = -e^{1-x}.$$

Dans ces conditions, au point A(1;1):

$$• f'(A) = -1$$

$$• g'(A) = -1.$$

Au total: oui les 2 courbes ont la même tangente.

Partie C:

1. Déterminons une primitive F de f sur IR:

f est continue sur IR, elle admet donc une primitive sur IR cad une fonction F dérivable sur IR avec $F' = f$.

$$\text{Ici: } F(x) = \int f(x) dx \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2}e^{1-x^2}.$$

Et nous avons bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (-2x) \cdot e^{1-x^2} \Rightarrow F'(x) = f(x)$.

Au total, une primitive F de f sur IR est: $F(x) = -\frac{1}{2}e^{1-x^2}$.

2. Déduisons-en la valeur de $\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2}) dx$:

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2}) dx$.

" $e^{1-x} - xe^{1-x^2}$ " est continue sur $[0;1]$, elle admet donc des primitives sur $[0;1]$ et par conséquent: I existe.

$$I = \int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2}) dx$$

$$= [-e^{1-x} - F(x)]_0^1 \Rightarrow I = \frac{1}{2}(e-1).$$

Au total: $I = \frac{1}{2}(e-1).$

3. Interprétons graphiquement ce résultat:

Cela signifie qu'en unités d'aire et à l'unité près, l'aire \mathcal{A} du domaine compris entre la courbe C_f , la courbe C_g et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$, est telle que: $\mathcal{A} = \frac{1}{2}(e-1).$

Nous pouvons représenter cette aire \mathcal{A} , en jaune, sur le graphique suivant:

