# Corrigé

# Exercice 3

freemaths.fr

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

## MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : **9**



***Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.***

*Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,*
*conformément à la réglementation en vigueur.*

*Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.*
*Le candidat doit traiter tous les exercices.*
*Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*
*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

**Exercice 3** (7 *points*)

**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

On considère la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x^2}$.

1. Calculer la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.
   *Indication : on pourra utiliser que pour tout réel $x$ différent de 0,* $f(x) = \frac{\mathrm{e}}{x} \times \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

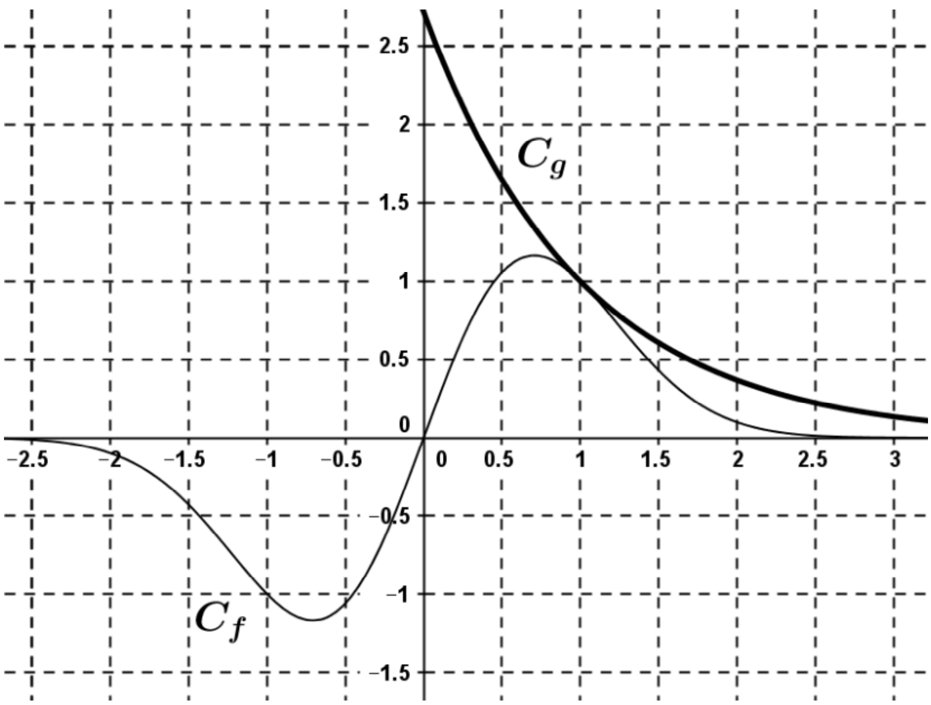
   On admettra que la limite de la fonction $f$ en $-\infty$ est égale à 0.

2.
   **a.** On admet que $f$ est dérivable sur **R** et on note $f'$ sa dérivée.
   Démontrer que pour tout réel $x$,
   $$f'(x) = (1 - 2x^2)\mathrm{e}^{1-x^2}.$$

   **b.** En déduire le tableau de variations de la fonction $f$.

**Partie B**

On considère la fonction $g$ définie pour tout réel $x$ par $g(x) = \mathrm{e}^{1-x}$.
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère du plan les courbes représentatives $C_f$ et $C_g$ respectivement des fonctions $f$ et $g$.



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?
2. Justifier que, pour tout réel $x$ appartenant à $]-\infty\ ;\ 0]$, $f(x) < g(x)$.
3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

   On pose, pour tout réel $x$ strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.

   a. Montrer que, pour tout réel $x$ strictement positif,

   $$f(x) \leq g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leq 0.$$

   On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

   b. On admet que la fonction $\Phi$ est dérivable sur $]0;+\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction $\Phi$. (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)

   c. En déduire que, pour tout réel $x$ strictement positif, $\Phi(x) \leq 0$.
4. 

   a. La conjecture émise à la question **1.** de la partie B est-elle valide ?

   b. Montrer que $C_f$ et $C_g$ ont un unique point commun, noté A.

   c. Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

**Partie C**

1. Trouver une primitive $F$ de la fonction $f$ sur **R**.
2. En déduire la valeur de $\int_0^1 \left(e^{1-x} - xe^{1-x^2}\right) dx$.
3. Interpréter graphiquement ce résultat.

# EXERCICE 3

## [ Antilles - Guyane 2016 ]

### Partie A:

**1. Calculons la limite de la fonction $f$ en $+\infty$:**

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x e^{1-x^2}$

  $= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$ $\left( x e^{1-x^2} = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}} \right)$.

- Or, d'après le cours: • $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

  • $\lim\limits_{U \to +\infty} \frac{U}{e^u} = 0$ (Théorème des croissances comparées).

Dans ces conditions, en posant $U = x^2$:

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e \times \left( \frac{1}{x} \right)$

$= 0$ ;

• $\lim\limits_{x^2 \to +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$.

Ainsi: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \times 0$

$= 0$.

Au total: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

**2. a. Démontrons que pour tout $x \in IR$, $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}$:**

Ici: • $f(x) = x e^{1-x^2}$

• $Df = IR$.

D'après l'énoncé, $f$ est dérivable sur $IR$.

Ainsi, nous pouvons calculer $f'$ pour tout $x \in IR$.

Pour tout $x \in IR$: $f'(x) = (1 \times e^{1-x^2}) + (x \times (-2x) \times e^{1-x^2})$

$\Rightarrow$ $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}$.

Au total, pour tout $x \in IR$, nous avons bien: $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}$.

**2. b. Déduisons-en le tableau de variation de $f$:**

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout $x \in IR$:

• **1er cas**: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1 - 2x^2)e^{1-x^2} = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0$, car $e^{1-x^2} > 0$,

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

• **2eme cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow (1 - 2x^2)e^{1-x^2} < 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2x^2 < 0$, car $e^{1-x^2} > 0$,

$\Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \; x \in \left]-\infty ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[ \cup \left]\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty\right[.$$

**• 3ème cas:** $f'(x) > 0.$

$$f'(x) > 0 \iff (1 - 2x^2)e^{1-x^2} > 0$$
$$\iff 1 - 2x^2 > 0, \quad \text{car} \quad e^{1-x^2} > 0,$$
$$\iff x^2 < \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \; x \in \left]-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[.$$

Au total: • $f$ est décroissante sur $\left]-\infty ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty\right[,$

(car sur cet intervalle, $f'(x) \leqslant 0$)

• $f$ est croissante sur $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$

(car sur cet intervalle, $f'(x) \geqslant 0$)

**Nous pouvons dresser alors le tableau de variation suivant:**

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $a$ | $\searrow$ | $b$ | $\nearrow$ | $c$ | $\searrow$ | $d$ |

Avec: • $a = f(-\infty) \Rightarrow a \to 0,$

• $b = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow b = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{1/2},$

• $c = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{1/2},$

• $d = f(+\infty) \Rightarrow d \to 0.$

## Partie B:

**1. Quelle conjecture peut-on émettre ?**

La conjecture que nous pouvons émettre est:

" la courbe de la fonction g est au dessus de celle de la fonction $f$ " ;

" Donc, a priori, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) \geq f(x)$. "

Notons que $Cg$ et $Cf$ se croisent au point $(1;1)$.

**2. Justifions que, pour tout $x \in ]-\infty;0]$, $f(x) < g(x)$:**

Ici: • $f(x) = xe^{1-x^2}$

• $g(x) = e^{1-x}$

• $Df = \mathbb{R}$ et $Dg = \mathbb{R}$.

$$g(x) > f(x) \iff e^{1-x} > xe^{1-x^2}$$

$$\iff x\frac{e^{1-x^2}}{e^{1-x}} < 1$$

$$\iff xe^{-x^2+x} < 1 \quad (a).$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc pour tout $x \in ]-\infty;0]$, $e^{-x^2+x} > 0$.

Donc si $x \in ]-\infty;0]$, l'inégalité $(a)$ est toujours vérifiée.

En définitive: si $x \in ]-\infty;0]$, $f(x) < g(x)$.

**3. a. Montrons que pour tout $x \in ]0;+\infty[$, $f(x) \leq g(x) \iff \varphi(x) \leq 0$:**

Ici: • $f(x) = xe^{1-x^2}$

• $g(x) = e^{1-x}$

• $\varphi(x) = \ln(x) - x^2 + x$

• $Df = Dg = D\varphi = ]0;+\infty[$.

D'après la question précédente, nous pouvons écrire:

$f(x) \leqslant g(x)$ ssi: $x e^{-x^2+x} \leqslant 1$ (a)

cad: $\ln(x e^{-x^2+x}) \leqslant \ln(1)$

ou encore: $\ln(x) - x^2 + x \leqslant 0$ $(x > 0)$

ce qui revient à: $\varphi(x) \leqslant 0$.

En conclusion: pour tout $x \in ]0;+\infty[$, $f(x) \leqslant g(x)$ <=> $\varphi(x) \leqslant 0$.

**3. b. Dressons le tableau de variation de la fonction $\varphi$:**

• Ici: • $\varphi(x) = \ln(x) - x^2 + x$

• $D\varphi = ]0;+\infty[$.

D'après l'énoncé, $\varphi$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer $\varphi'$ pour tout $x \in ]0;+\infty[$.

Pour tout $x \in ]0;+\infty[$: $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1$.

Ainsi, pour tout $x \in ]0;+\infty[$: $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1$.

• Nous allons distinguer 3 cas, pour tout $x \in ]0;+\infty[$:

• **1er cas**: $\varphi'(x) = 0$.

$\varphi'(x) = 0$ <=> $\frac{1}{x} - 2x + 1 = 0$

<=> $-2x^2 + x + 1 = 0$ $(x \neq 0)$

cad ssi: $x = 1$, car $x = -\frac{1}{2} \notin ]0;+\infty[$.

• **2$^{eme}$ cas**: $\varphi'(x) < 0$.

$\varphi'(x) < 0 \iff -2x^2 + x + 1 < 0$

cad ssi: $x \in ]1;+\infty[$.

• **3$^{eme}$ cas**: $\varphi'(x) > 0$.

$\varphi'(x) > 0 \iff -2x^2 + x + 1 > 0$

cad ssi: $x \in ]0;1[$.

Au total: • $\varphi$ est décroissante sur $[1;+\infty[$,

($car$ sur cet intervalle, $\varphi'(x) \leqslant 0$)

• $\varphi$ est croissante sur $]0;1]$.

(car sur cet intervalle, $\varphi'(x) \geqslant 0$)

• **Nous pouvons dresser alors le tableau de variation suivant**:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\varphi$ | $\Vert$ $a$ | $\nearrow$ | $b$ | $\searrow$ | $c$ |

Avec: • $a = \ldots$,

• $b = 0$,

• $c = \ldots$.

**3. c. Déduisons-en que, pour tout réel $x > 0$, $\varphi(x) \leqslant 0$**:

Le maximum de la fonction $\varphi$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ est atteint quand: $x_{max} = 1$.

Dans ce cas: $\varphi_{max}(x_{max}) = 0$ ($b$ sur le tableau de variation).

Au total, comme $\varphi_{max}(x_{max}) = 0$, nous pouvons affirmer que:

pour tout $x > 0$, $\varphi(x) \leqslant 0$.

**4. a. " A priori, pour tout $x \in ]0;+\infty[$, $g(x) \geqslant f(x)$ " ?**

À la question précédente, nous avons vu que: $\varphi(x) \leqslant 0$, pour tout $x \in ]0;+\infty[$.

Or: $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.

D'où: $f(x) - g(x) \leqslant 0 \Rightarrow f(x) \leqslant g(x)$.

Au total, oui la conjecture est valide car: pour tout $x \in ]0;+\infty[$, $g(x) \geqslant f(x)$.

Cela confirme bien que la courbe de la fonction g est au dessus de celle de la fonction $f$.

**4. b. Montrons que $Cf$ et $Cg$ ont un unique point commun:**

Ici:
- $f(x) = x e^{1-x^2}$
- $g(x) = e^{1-x}$
- $Df = Dg = ]0;+\infty[$.

Le point d'intersection des courbes $Cf$ et $Cg$ est tel que:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \varphi(x) = 0.$$

Or, $\varphi(x) = 0$ quand: $x = 1$.

Ainsi, les courbes $Cf$ et $Cg$ ont un unique point commun:

le point $A(1;f(1))$ ou $A(1;g(1))$, cad: $A(1;1)$.

**4. c. Montrons qu'au point A, les deux courbes ont la même tangente:**

Pour répondre à cette question, il suffit de montrer qu'au point A(1;1):

$$f'(A) = g'(A).$$

Or nous savons que: • $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}$

• $g'(x) = -e^{1-x}$.

Dans ces conditions, au point A(1;1):

• $f'(A) = -1$

• $g'(A) = -1$.

Au total: oui les 2 courbes ont la même tangente.

## Partie C:

**1. Déterminons une primitive F de $f$ sur IR:**

$f$ est continue sur IR, elle admet donc une primitive sur IR cad une fonction F dérivable sur IR avec $F' = f$.

Ici: $F(x) = \int f(x)dx$ => $F(x) = -\frac{1}{2}e^{1-x^2}$.

Et nous avons bien, pour tout $x \in$ IR: $F'(x) = -\frac{1}{2}\cdot(-2x)\cdot e^{1-x^2}$ => $F'(x) = f(x)$.

Au total, une primitive F de $f$ sur IR est: $F(x) = -\frac{1}{2}e^{1-x^2}$.

**2. Déduisons-en la valeur de $\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2})dx$:**

Ici, il s'agit de calculer: $I = \int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2})dx$.

" $e^{1-x} - xe^{1-x^2}$ " est continue sur [0;1], elle admet donc des primitives sur [0;1] et par conséquent: I existe.

$$I = \int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2})dx$$

$$= [-e^{1-x} - F(x)]_0^1 \Rightarrow I = \frac{1}{2}(e-1).$$

Au total: $I = \frac{1}{2}(e-1).$

**3. Interprétons graphiquement ce résultat:**

Cela signifie qu'en unités d'aire et à l'unité près, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine compris entre la courbe $Cf$, la courbe $Cg$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$, est telle que: $\mathscr{A} = \frac{1}{2}(e-1).$

Nous pouvons représenter cette aire $\mathscr{A}$, en jaune, sur le graphique suivant: