Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

B A C C A L A U R É A T   G É N É R A L

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : **9**

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 2 (3 *points*)

Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u}\,,\vec{v})$.

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z-2|=1$.

1. Justifier que $\mathscr{C}$ est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.
2. Soit a un nombre réel. On appelle $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y=ax$.
   Déterminer le nombre de points d'intersection entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ en fonction des valeurs du réel a.

EXERCICE 2 (Antilles - Guyane 2016)

① **Justifions que $\mathcal{C}$ est un cercle dont on précisera le rayon et le centre :**

L'équation d'un cercle de centre $A(a,b)$ et de rayon R est :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

$\mathcal{C}$ est l'ensemble des points $M(z)$ du plan avec : $|z-2| = 1$.

$$|z-2| = 1 \iff |x+iy-2| = 1$$

$$\iff |(x-2)+iy| = 1$$

$$\iff (x-2)^2 + y^2 = 1^2$$

$$\implies (x-2)^2 + y^2 = R^2.$$

Au total : $\mathcal{C}$ est bien un cercle de rayon $R=1$ et de centre $A(2;0)$.

② **Déterminons le nombre de points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, en fonction des valeurs du réel "a" :**

Les points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ vérifient le système :

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 1 \\ y = ax \end{cases} \iff \begin{cases} (x-2)^2 + (ax)^2 = 1 \\ y = ax \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} (a^2+1)x^2 - 4x + 3 = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

Soit l'équation : $(a^2+1)x^2 - 4x + 3 = 0$.

$\Delta = 16 - 12(a^2+1) \implies \Delta = 4 - 12a^2.$

Distinguons 3 cas.

1. $\Delta = 0$:

$\Delta = 0 \iff a^2 = 1/3 \implies a = -\sqrt{3}/3$ ou $a = \sqrt{3}/3$.

Dans ce cas, l'équation admet une solution unique :

$$x = \frac{4}{2\left(\frac{1}{3}+1\right)} \implies x = \frac{3}{2}.$$

Au total, dans ce cas, il y aura 2 points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$:

$$U\left(\frac{3}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{3}x\right) \text{ et } V\left(\frac{3}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{3}x\right),$$

cad : $U\left(\frac{3}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $V\left(\frac{3}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. $\Delta < 0$:

Dans ce cas, l'équation n'admet aucune solution.

Au total, dans ce cas, aucun point d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

3. $\Delta > 0$:

$\Delta > 0 \iff a \in \left]-\frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$.

Dans ce cas, l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x' = \frac{4-\sqrt{\Delta}}{2(a^2+1)} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{4+\sqrt{\Delta}}{2(a^2+1)}.$$

Au total, dans ce cas, il y aura 2 points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$:

$$R(x' ; ax') \text{ et } T(x'' ; ax'').$$