EXERCICE 2 (Antilles - Guyane 2016)

① Justifions que $\mathcal{C}$ est un cercle dont on précisera le rayon et le centre :

L'équation d'un cercle de centre $A(a,b)$ et de rayon R est :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

$\mathcal{C}$ est l'ensemble des points $M(z)$ du plan avec : $|z-2| = 1$.

$$|z-2| = 1 \iff |x+iy-2| = 1$$

$$\iff |(x-2)+iy| = 1$$

$$\iff (x-2)^2 + y^2 = 1^2$$

$$\implies (x-2)^2 + y^2 = R^2.$$

Au total : $\mathcal{C}$ est bien un cercle de rayon $R=1$ et de centre $A(2;0)$.

② Déterminons le nombre de points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, en fonction des valeurs du réel " a " :

Les points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ vérifient le système :

$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 1 \\ y = ax \end{cases} \iff \begin{cases} (x-2)^2 + (ax)^2 = 1 \\ y = ax \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} (a^2+1)x^2 - 4x + 3 = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

Soit l'équation : $(a^2+1)x^2 - 4x + 3 = 0$.

$$\Delta = 16 - 12(a^2+1) \Rightarrow \Delta = 4 - 12a^2.$$

Distinguons 3 cas.

1. $\Delta = 0$:

$\Delta = 0 \iff a^2 = 1/3 \Rightarrow a = -\sqrt{3}/3$ ou $a = \sqrt{3}/3$.

Dans ce cas, l'équation admet une solution unique :

$$x = \frac{4}{2\left(\frac{1}{3}+1\right)} \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Au total, dans ce cas, il y aura 2 points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$:

$$U\left(\frac{3}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{3}x\right) \text{ et } V\left(\frac{3}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{3}x\right),$$

cad : $U\left(\frac{3}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $V\left(\frac{3}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. $\Delta < 0$:

Dans ce cas, l'équation n'admet aucune solution.

Au total, dans ce cas, aucun point d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

3. $\Delta > 0$:

$\Delta > 0 \iff a \in \left]-\frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$.

Dans ce cas, l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x' = \frac{4-\sqrt{\Delta}}{2(a^2+1)} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{4+\sqrt{\Delta}}{2(a^2+1)}.$$

Au total, dans ce cas, il y aura 2 points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$:

$$R(x' ; ax') \text{ et } T(x'' ; ax'').$$