EXERCICE 1

[Antilles - Guyane 2016]

Partie A: Les ampoules

1. a. Construisons un arbre pondéré représentant la situation:

D'après l'énoncé, nous avons:

- A = " l'ampoule provient de la machine A ".
- B = " l'ampoule provient de la machine B ".
- D = " l'ampoule présente un défaut ".
- $\overline{D}$ = " l'ampoule est sans défaut ".

- $P(A) = 65\%$
- $P(B) = 35\%$

$(65\% + 35\% = 1)$.

- $P_A(D) = 8\%$
- $P_A(\overline{D}) = 92\%$

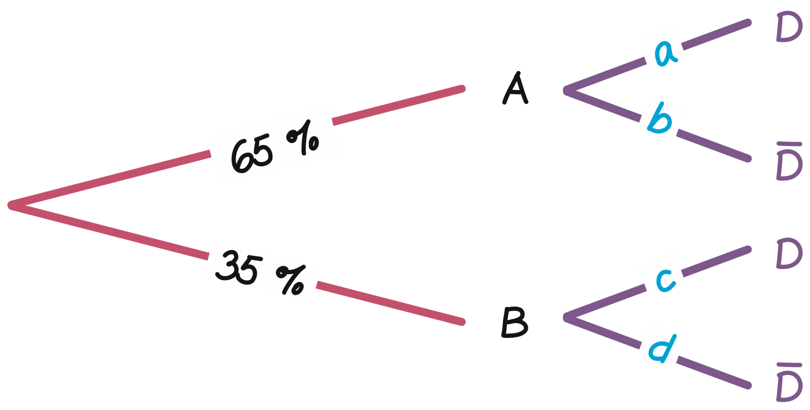
$(8\% + 92\% = 1)$.

- $P_B(D) = 5\%$
- $P_B(\overline{D}) = 95\%$

$(5\% + 95\% = 1)$.

Nous pouvons représenter la situation par un arbre pondéré.

D'où l'arbre pondéré suivant:



, avec:

- $a = 8$ %
- $b = 92$ %
- $c = 5$ %
- $d = 95$ %

1. b. Montrons que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0. 9305:

Cela revient à montrer que: $P(\bar{D}) = 0.9305$.

L'événement $\bar{D} = (\bar{D} \cap A) \cup (\bar{D} \cap B)$.

D'où: $P(\bar{D}) = P(\bar{D} \cap A) + P(\bar{D} \cap B)$

$$= P_A(\bar{D}) \times P(A) + P_B(\bar{D}) \times P(B).$$

Ainsi: $P(\bar{D}) = 92\% \times 65\% + 95\% \times 35\%$

$$\Rightarrow \; P(\bar{D}) = 0.9305.$$

Au total, il y a 93. 05% de chance de tirer une ampoule sans défaut.

1. c. Calculons la probabilité que l'ampoule tirée sans défaut provienne de la machine A:

Cela revient à calculer: $P_{\bar{D}}(A)$.

$$P_{\bar{D}}(A) = \frac{P(\bar{D} \cap A)}{P(\bar{D})}$$

$$= \frac{P_A(\bar{D}) \times P(A)}{P(\bar{D})}.$$

Ainsi: $P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{92\% \times 65\%}{93.05\%}$ => $P_{\overline{D}}(A) \approx 64.26\%$.

Au total, il y a 64.26% de chance que l'ampoule tirée sans défaut provienne de la machine A.

2. Calculons la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut:

Soit l'expérience aléatoire consistant à prélever au hasard 10 ampoules dans la production d'une journée à la sortie de la machine A.

Soient les événements D = " l'ampoule présente un défaut ", et $\overline{D}$ = " l'ampoule est sans défaut ".

On désigne par X le nombre d'ampoules sans défaut contenues dans ce lot de 10 ampoules.

Nous sommes en présence de 10 épreuves aléatoires indépendantes, avec $\Omega = \{ D, \overline{D} \}$ et $X(\Omega) = \{ 0, 1, 2, ..., 10 \}$.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de $\overline{D}$ suit donc une loi binômiale de paramètres: $n = 10$ et $p = 0.92$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B(10 ; 0.92)$.

En fait, on répète 10 fois un schéma de Bernoulli.

Dans ces conditions, il s'agit de calculer:

$$P(X \geq 9) \text{ avec: } X \rightsquigarrow B(10 ; 0.92).$$

Or: $P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10)$

$$= \binom{10}{9}(0.92)^9(1 - 0.92)^1 + \binom{10}{10}(0.92)^{10}$$

$$\Rightarrow P(X \geq 9) \approx 0.8121.$$

(à l'aide d'une machine à calculer)

Au total, il y a 81.21% de chance d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

EXERCICE 1

[Antilles-Guyane 2016]

Partie B: Durée de vie d'une ampoule

1. a. Montrons que $P(T \geqslant a) = e^{-\lambda a}$:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = ?$

Dans ces conditions:

- $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$, $\forall\, x \in [0, +\infty[$.
- $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.
- $P(T \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx$.

Il s'agit de calculer: $P(T \geqslant a)$.

$P(T \geqslant a) = 1 - P(T \leqslant a)$

$$= 1 - \int_0^a \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= 1 - \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^a$$

$$= 1 + [e^{-\lambda x}]_0^a$$

$$= 1 + (e^{-\lambda a} - 1)$$

$\Rightarrow \quad P(T \geqslant a) = e^{-\lambda a}.$

Au total, nous avons bien: $P(T \geqslant a) = e^{-\lambda a}.$

1. b. Montrons que $P_{T \geqslant t}(T \geqslant t+a) = P(T \geqslant a)$:

Notons que: $P(T \geqslant a) = e^{-\lambda a}$ et $P(T \geqslant t) = e^{-\lambda t}.$

$$P_{T \geqslant t}(T \geqslant t+a) = \frac{P[(T \geqslant t+a) \cap (T \geqslant t)]}{P(T \geqslant t)}$$

$$= \frac{P(T \geqslant t+a)}{P(T \geqslant t)} \quad \text{car: } t + a \geqslant t$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+a)}}{e^{-\lambda t}}$$

$$= e^{-\lambda a}.$$

Or: $P(T \geqslant a) = e^{-\lambda a}.$

Par conséquent, l'égalité est bien vérifiée.

Au total, pour tous t et a positifs: $P_{T \geqslant t}(T \geqslant t+a) = P(T \geqslant a).$

2. a. Déterminons la valeur de λ:

$E(T) = 10\,000.$

Or, d'après le cours, $E(T) = \frac{1}{\lambda}.$

Par conséquent: $\lambda = 0,0001.$

Au total, la valeur exacte de λ est: $\lambda = 0,0001.$

2. b. Calculons $P(T \geqslant 5\,000)$:

$$P(T \geqslant 5000) = e^{-\lambda \times 5000}$$

$$= e^{-0,5}$$

$$\Rightarrow \quad P(T \geqslant 5000) \approx 60,65\%.$$

Au total, la probabilité demandée est d'environ: 60, 65%.

2. c. Déterminons la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures, sachant que l'ampoule a déjà fonctionné 7000 heures:

Il s'agit de calculer: $P_{T \geqslant 7000}(T \geqslant 12\,000)$.

D'après la question **1. b.**:

$$P_{T \geqslant 7000}(T \geqslant 12\,000) = P(T \geqslant 5000).$$

En effet, la loi exponentielle est la loi de durée sans vieillissement.

Ainsi: $P_{T \geqslant 7000}(T \geqslant 12\,000) \approx 60,65\%$.

Au total, la probabilité demandée est d'environ: 60, 65%.

Partie C: Qualité de la production

1. Déterminons un intervalle de fluctuation asymptotique:

Ici, nous avons:
- $n = 1000$
- $p = 6\%$
- $f = \dfrac{71}{1000} \Rightarrow f = 7,1\%$.

Dans ces conditions:

$$n = 1000 \geqslant 30, \quad n \cdot p = 60 \geqslant 5 \quad \text{et} \quad n \cdot (1 - p) = 940 \geqslant 5.$$

Les conditions sont donc réunies.

On choisit un échantillon aléatoire de 1000 ampoules parmi toutes les ampoules.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1,96 \times \left(\frac{p\,(1-p)}{n} \right)^{1/2} ; p + 1,96 \times \left(\frac{p\,(1-p)}{n} \right)^{1/2} \right].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$I = [\ 4,53\%\ ;\ 7,47\%\ ].$$

2. A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise ?

La fréquence " f " d'ampoules défectueuses, sur l'échantillon est telle que:

$$f = 7,1\% \in I.$$

Ainsi, il n'y a aucune raison de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise.