Antilles-Guyane 2016

Exercice 4 (5 *points*)

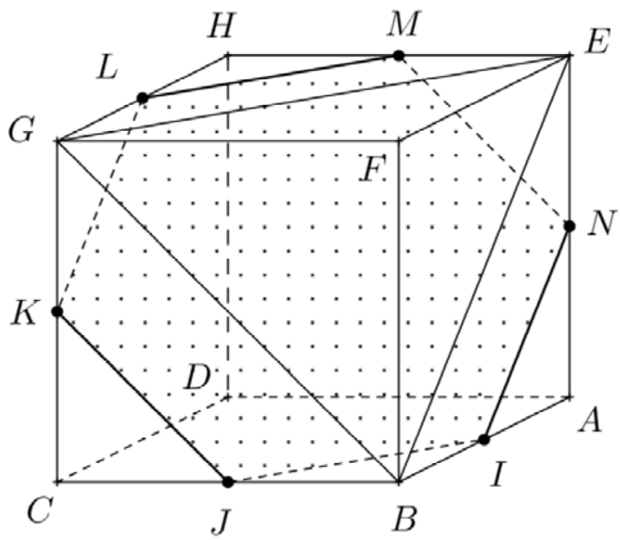
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.

L'espace est muni du repère orthonormé $(D\,;\,\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{DH})$.

Dans ce repère, on a :
$D(0\,;\,0\,;\,0)$, $C(1\,;\,0\,;\,0)$, $A(0\,;\,1\,;\,0)$, $H(0\,;\,0\,;\,1)$ et $E(0\,;\,1\,;\,1)$.

Soit I le milieu de $[AB]$.



Soit $\mathscr{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I.

On admet que la section du cube par le plan $\mathscr{P}$ représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$ et $[AE]$.

1.

a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE).

b. En déduire une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

2. Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.

3.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB).

b. En déduire que la droite (HB) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.

4. Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre $FBGE$.

EXERCICE 4

[Antilles-Guyane 2016]

1. a. Montrons que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE):

D'après le cours: un vecteur $\vec{n}$ (a ; b ; c) est normal à un plan ssi ce vecteur est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.

Ici: • il s'agit du plan (BGE);

• 2 vecteurs non colinéaires de ce plan sont respectivement:

$$\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En effet: • G (1; 0; 1) car: $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG}$

$\iff \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DC}$

$\implies \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$;

• B (1; 1; 0) car: $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$

$\iff \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$

$\implies \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$.

• $\vec{n}$ (1; 1; 1) car: $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EF}$

$\iff \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$

$\implies \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH}$.

De plus: • $\vec{n}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont orthogonaux car: $(1 \times 0) + (1 \times -1) + (1 \times 1) = 0$;

• $\vec{n}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont orthogonaux car: $(1 \times -1) + (1 \times 0) + (1 \times 1) = 0$.

Par conséquent: $\vec{n}$ cad $\overrightarrow{DF}$ est bien orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan. Donc $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal au plan (BGE).

1. b. Déduisons-en une équation cartésienne du plan P:

Ici: • $\vec{n}$ $(a = 1 ; b = 1 ; c = 1)$ cad $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal au plan (BGE);

• $I\left(\frac{1}{2} ; 1 ; 0\right)$ est un point de l'espace.

D'où, une équation cartésienne du plan passant par I et de vecteur normal $\overrightarrow{DF}$ est: $a(x - x_I) + b(y - y_I) + c(z - z_I) = 0$

$\Longleftrightarrow$ $1 \times \left(x - \frac{1}{2}\right) + 1 \times (y - 1) + 1 \times (z - 0) = 0$

$\Longrightarrow$ $x + y + z = \frac{3}{2}$.

En conclusion, une équation cartésienne du plan (BGE) est: $x + y + z = \frac{3}{2}$.

2. Montrons que le point N est le milieu du segment [AE]:

Nous avons: $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AE}$

$\Longrightarrow$ $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DH}$.

Au total, les coordonnées du point N, milieu du segment [AE], sont:

$$N\left(0 ; 1 ; \frac{1}{2}\right).$$

3. a. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (HB):

Soient: • le vecteur $\overrightarrow{HB}$ avec: $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (HB) avec: $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

D'où, la représentation paramétrique de la droite passant par H et de vecteur directeur $\vec{u}$ s'écrit:

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Au total, la représentation paramétrique de la droite (HB) est:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3. b. Déduisons-en que la droite (HB) et le plan P sont sécants en un point T qu'on déterminera:

Etape 1: Nous savons que la représentation paramétrique de la droite (HB) est:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Etape 2: Nous savons que l'équation cartésienne du plan P est:

$$x + y + z = \frac{3}{2}.$$

Etape 3: Le point $T\begin{pmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{pmatrix}$ d'intersection entre (HB) et P est tel que:

$$\begin{cases} x_T = t \\ y_T = t \\ z_T = 1 - t \end{cases} , \text{ et: } x_T + y_T + z_T = \frac{3}{2} \quad (1).$$

Dans ces conditions: $(1) \iff t + t + (1 - t) = \frac{3}{2} \implies t = \frac{1}{2}.$

Les coordonnées du point T, avec $t = \frac{1}{2}$, sont donc: $T\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$

En définitive, les coordonnées du point T sont:

$$x_T = \frac{1}{2},\ y_T = \frac{1}{2} \text{ et } z_T = \frac{1}{2}.$$

4. Calculons le volume du tétraèdre FBGE:

D'après le cours, le volume du tétraèdre FBGE nous est donné par la formule:

$$V = \frac{\textbf{Aire du tétraèdre x Hauteur du tétraèdre}}{3}.$$

Ici: $V = \dfrac{\left(\frac{1}{2} \times FE \times FB\right) \times (FE)}{3} \iff V = \dfrac{\left(\frac{1}{2} \times 1\right)}{3} \implies V = \frac{1}{6}.$

Au total: en unités de volume, le volume du tétraèdre FBGE est de $\frac{1}{6}$.