Corrigé

Exercice 4

B A C C A L A U R É A T   G É N É R A L

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : **7**

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 4 (5 *points*)

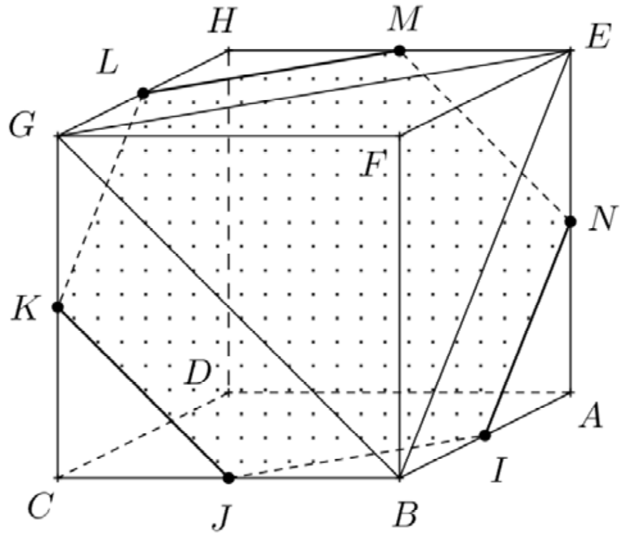
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.

L'espace est muni du repère orthonormé $(D\,;\,\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{DH})$.

Dans ce repère, on a :
$D(0\,;\,0\,;\,0)$, $C(1\,;\,0\,;\,0)$, $A(0\,;\,1\,;\,0)$, $H(0\,;\,0\,;\,1)$ et $E(0\,;\,1\,;\,1)$.

Soit I le milieu de $[AB]$.



Soit $\mathscr{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I.

On admet que la section du cube par le plan $\mathscr{P}$ représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$ et $[AE]$.

1.

a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE).

b. En déduire une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

2. Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.

3.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB).

b. En déduire que la droite (HB) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.

4. Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre $FBGE$.

EXERCICE 4

[Antilles-Guyane 2016]

1. a. Montrons que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE):

D'après le cours: un vecteur $\vec{n}$ (a ; b ; c) est normal à un plan ssi ce vecteur est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.

Ici: • il s'agit du plan (BGE);

• 2 vecteurs non colinéaires de ce plan sont respectivement:

$$\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En effet: • G (1; 0; 1) car: $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$;

• B (1; 1; 0) car: $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$.

• $\vec{n}$ (1; 1; 1) car: $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EF}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH}$.

De plus: • $\vec{n}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont orthogonaux car: $(1 \times 0) + (1 \times -1) + (1 \times 1) = 0$;

• $\vec{n}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont orthogonaux car: $(1 \times -1) + (1 \times 0) + (1 \times 1) = 0$.

Par conséquent: $\vec{n}$ cad $\overrightarrow{DF}$ est bien orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan. Donc $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal au plan (BGE).

1. b. Déduisons-en une équation cartésienne du plan P:

Ici: • $\vec{n}$ $(a = 1 ; b = 1 ; c = 1)$ cad $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal au plan (BGE);

• $I\left(\frac{1}{2} ; 1 ; 0\right)$ est un point de l'espace.

D'où, une équation cartésienne du plan passant par I et de vecteur normal $\overrightarrow{DF}$ est: $a\,(x - x_I) + b\,(y - y_I) + c\,(z - z_I) = 0$

$\Leftrightarrow$ $1 \times \left(x - \frac{1}{2}\right) + 1 \times (y - 1) + 1 \times (z - 0) = 0$

$\Rightarrow$ $x + y + z = \frac{3}{2}$.

En conclusion, une équation cartésienne du plan (BGE) est: $x + y + z = \frac{3}{2}$.

2. Montrons que le point N est le milieu du segment [AE]:

Nous avons: $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AE}$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DH}$.

Au total, les coordonnées du point N, milieu du segment [AE], sont:

$$N\left(0 ; 1 ; \frac{1}{2}\right).$$

3. a. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (HB):

Soient: • le vecteur $\overrightarrow{HB}$ avec: $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (HB) avec: $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

D'où, la représentation paramétrique de la droite passant par H et de vecteur directeur $\vec{u}$ s'écrit:

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Au total, la représentation paramétrique de la droite (HB) est:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3. b. Déduisons-en que la droite (HB) et le plan P sont sécants en un point T qu'on déterminera:

Etape 1: Nous savons que la représentation paramétrique de la droite (HB) est:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Etape 2: Nous savons que l'équation cartésienne du plan P est:

$$x + y + z = \frac{3}{2}.$$

Etape 3: Le point $T\begin{pmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{pmatrix}$ d'intersection entre (HB) et P est tel que:

$$\begin{cases} x_T = t \\ y_T = t \\ z_T = 1 - t \end{cases} \quad , \text{ et: } \quad x_T + y_T + z_T = \frac{3}{2} \quad (1).$$

Dans ces conditions: $(1) \iff t + t + (1 - t) = \frac{3}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$.

Les coordonnées du point T, avec $t = \frac{1}{2}$, sont donc: $T\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

En définitive, les coordonnées du point T sont:

$$x_T = \frac{1}{2},\ y_T = \frac{1}{2} \text{ et } z_T = \frac{1}{2}.$$

4. Calculons le volume du tétraèdre FBGE:

D'après le cours, le volume du tétraèdre FBGE nous est donné par la formule:

$$V = \frac{\text{Aire du tétraèdre x Hauteur du tétraèdre}}{3}.$$

Ici: $V = \dfrac{\left(\frac{1}{2} \times FE \times FB\right) \times (FE)}{3} \iff V = \dfrac{\left(\frac{1}{2} \times 1\right)}{3} \Rightarrow V = \frac{1}{6}$.

Au total: en unités de volume, le volume du tétraèdre FBGE est de $\frac{1}{6}$.