

# Corrigé

## Exercice 1



---

---

freemaths.fr

---

---

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

**MATHÉMATIQUES**

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** — COEFFICIENT : **7**

***Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.***

*Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,  
conformément à la réglementation en vigueur.*

*Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.*

*Le candidat doit traiter tous les exercices.*

*Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche,  
même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements  
seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

## Exercice 1 (5 points)

### Commun à tous les candidats

Les valeurs approchées des résultats seront données à  $10^{-4}$  près.

Les parties A et B sont indépendantes.

#### Partie A

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

- à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;
- à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les évènements suivants :

- A « l'ampoule provient de la machine A » ;
- B « l'ampoule provient de la machine B » ;
- D « l'ampoule présente un défaut ».

1. On prélève une ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.
  - a. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
  - b. Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,9305.
  - c. L'ampoule tirée est sans défaut.  
Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.  
Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

#### Partie B

1. On rappelle que si  $T$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  ( $\lambda$  étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif  $a$ ,  $P(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx$ .
  - a. Montrer que  $P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$ .
  - b. Montrer que si  $T$  suit une loi exponentielle alors pour tous réels positifs  $t$  et  $a$  on a

$$P_{T \geq t}(T \geq t + a) = P(T \geq a).$$

2. Dans cette partie la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire  $T$  qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.
  - a. Déterminer la valeur exacte du paramètre  $\lambda$  de cette loi.
  - b. Calculer la probabilité  $P(T \geq 5\,000)$ .
  - c. Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures.

### Partie C

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

1. Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.
2. A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise ?

# EXERCICE 1

[ Antilles - Guyane 2016 ]

## Partie A: Les ampoules

1. a. Construisons un arbre pondéré représentant la situation:

D'après l'énoncé, nous avons:

- $A =$  " l'ampoule provient de la machine A ".
- $B =$  " l'ampoule provient de la machine B ".
- $D =$  " l'ampoule présente un défaut ".
- $\bar{D} =$  " l'ampoule est sans défaut ".

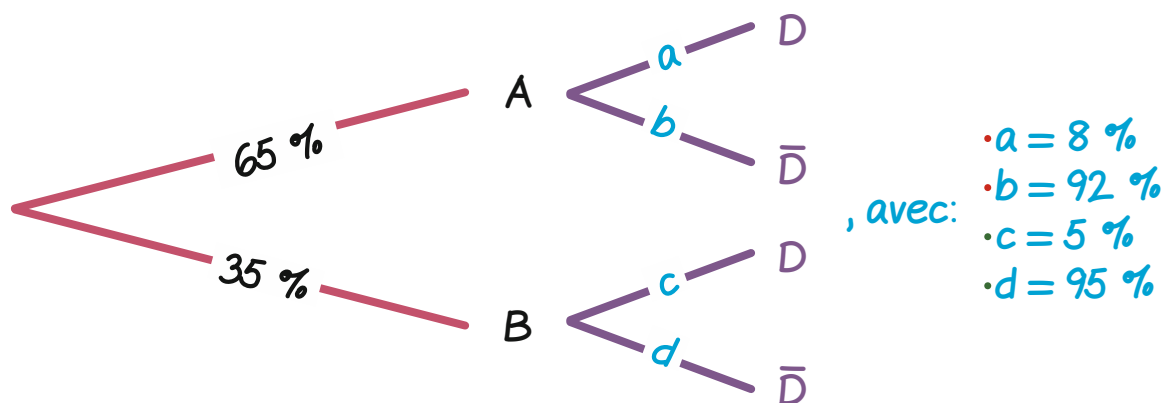
- $P(A) = 65\%$
- $P(B) = 35\%$   
(  $65\% + 35\% = 1$  ).

- $P_A(D) = 8\%$
- $P_A(\bar{D}) = 92\%$   
(  $8\% + 92\% = 1$  ).

- $P_B(D) = 5\%$
- $P_B(\bar{D}) = 95\%$   
(  $5\% + 95\% = 1$  ).

Nous pouvons représenter la situation par un arbre pondéré.

D'où l'arbre pondéré suivant:



**I. b. Montrons que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0.9305:**

Cela revient à montrer que:  $P(\bar{D}) = 0.9305$ .

L'événement  $\bar{D} = (\bar{D} \cap A) \cup (\bar{D} \cap B)$ .

D'où:  $P(\bar{D}) = P(\bar{D} \cap A) + P(\bar{D} \cap B)$

$$= P_A(\bar{D}) \times P(A) + P_B(\bar{D}) \times P(B).$$

Ainsi:  $P(\bar{D}) = 92\% \times 65\% + 95\% \times 35\%$

$$\Rightarrow P(\bar{D}) = 0.9305.$$

*Au total, il y a 93.05% de chance de tirer une ampoule sans défaut.*

**I. c. Calculons la probabilité que l'ampoule tirée sans défaut provienne de la machine A:**

Cela revient à calculer:  $P_{\bar{D}}(A)$ .

$$\begin{aligned} P_{\bar{D}}(A) &= \frac{P(\bar{D} \cap A)}{P(\bar{D})} \\ &= \frac{P_A(\bar{D}) \times P(A)}{P(\bar{D})}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi: } P_{\bar{D}}(A) = \frac{92\% \times 65\%}{93.05\%} \Rightarrow P_{\bar{D}}(A) \approx 64.26\%.$$

Au total, il y a 64.26% de chance que l'ampoule tirée sans défaut provienne de la machine A.

## 2. Calculons la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut:

Soit l'expérience aléatoire consistant à prélever au hasard 10 ampoules dans la production d'une journée à la sortie de la machine A.

Soient les événements  $D =$  " l'ampoule présente un défaut ", et  $\bar{D} =$  " l'ampoule est sans défaut ".

On désigne par  $X$  le nombre d'ampoules sans défaut contenues dans ce lot de 10 ampoules.

Nous sommes en présence de 10 épreuves aléatoires indépendantes, avec  $\Omega = \{ D, \bar{D} \}$  et  $X(\Omega) = \{ 0, 1, 2, \dots, 10 \}$ .

La variable aléatoire discrète  $X$  représentant le nombre de réalisations de  $\bar{D}$  suit donc une loi binômiale de paramètres:  $n = 10$  et  $p = 0.92$ .

Et nous pouvons noter:  $X \rightsquigarrow B(10; 0.92)$ .

En fait, on répète 10 fois un schéma de Bernoulli.

Dans ces conditions, il s'agit de calculer:

$$P(X \geq 9) \text{ avec: } X \rightsquigarrow B(10; 0.92).$$

$$\text{Or: } P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10)$$

$$= \binom{10}{9} (0.92)^9 (1 - 0.92)^1 + \binom{10}{10} (0.92)^{10}$$

$$\Rightarrow P(X \geq 9) \approx 0.8121.$$

(à l'aide d'une machine à calculer)

Au total, il y a 81.21% de chance d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

# EXERCICE 1

[ Antilles-Guyane 2016 ]

## Partie B: Durée de vie d'une ampoule

1. a. Montrons que  $P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$ .

D'après l'énoncé, nous savons que:

- $T$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda = ?$

Dans ces conditions:

- $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \forall x \in [0, +\infty[.$

- $E(T) = \frac{1}{\lambda}.$

- $P(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx.$

Il s'agit de calculer:  $P(T \geq a).$

$$P(T \geq a) = 1 - P(T \leq a)$$

$$= 1 - \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= 1 - \lambda \left[ -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^a$$

$$= 1 + [e^{-\lambda x}]_0^a$$

$$= 1 + (e^{-\lambda a} - 1)$$



$$\Rightarrow P(T \geq a) = e^{-\lambda a}.$$

Au total, nous avons bien:  $P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$ .

1. b. Montrons que  $P_{T \geq t}(T \geq t+a) = P(T \geq a)$ :

Notons que:  $P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$  et  $P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$ .

$$\begin{aligned} P_{T \geq t}(T \geq t+a) &= \frac{P[(T \geq t+a) \cap (T \geq t)]}{P(T \geq t)} \\ &= \frac{P(T \geq t+a)}{P(T \geq t)} \quad \text{car: } t+a \geq t \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+a)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda a}. \end{aligned}$$

Or:  $P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$ .

Par conséquent, l'égalité est bien vérifiée.

Au total, pour tous  $t$  et  $a$  positifs:  $P_{T \geq t}(T \geq t+a) = P(T \geq a)$ .

2. a. Déterminons la valeur de  $\lambda$ :

$$E(T) = 10\,000.$$

Or, d'après le cours,  $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ .

Par conséquent:  $\lambda = 0,0001$ .

Au total, la valeur exacte de  $\lambda$  est:  $\lambda = 0,0001$ .

2. b. Calculons  $P(T \geq 5000)$ :

$$P(T \geq 5000) = e^{-\lambda \times 5000}$$

$$= e^{-0,5}$$

$$\Rightarrow P(T \geq 5000) \approx 60,65\%$$

Au total, la probabilité demandée est d'environ: 60,65%.

2. c. Déterminons la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12000 heures, sachant que l'ampoule a déjà fonctionné 7000 heures:

Il s'agit de calculer:  $P_{T \geq 7000}(T \geq 12000)$ .

D'après la question 1. b.:

$$P_{T \geq 7000}(T \geq 12000) = P(T \geq 5000).$$

En effet, la loi exponentielle est la loi de durée sans vieillissement.

Ainsi:  $P_{T \geq 7000}(T \geq 12000) \approx 60,65\%$ .

Au total, la probabilité demandée est d'environ: 60,65%.

## Partie C: Qualité de la production

1. Déterminons un intervalle de fluctuation asymptotique:

Ici, nous avons: •  $n = 1000$

•  $p = 6\%$

•  $f = \frac{71}{1000} \Rightarrow f = 7,1\%$ .

Dans ces conditions:

$$n = 1000 \geq 30, n \cdot p = 60 \geq 5 \text{ et } n \cdot (1 - p) = 940 \geq 5.$$

Les conditions sont donc réunies.

On choisit un échantillon aléatoire de 1000 ampoules parmi toutes les ampoules.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[ p - 1,96 \times \left( p \frac{(1-p)}{n} \right)^{1/2} ; p + 1,96 \times \left( p \frac{(1-p)}{n} \right)^{1/2} \right].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$I = [ 4,53\% ; 7,47\% ].$$

## 2. A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise ?

La fréquence " f " d'ampoules défectueuses, sur l'échantillon est telle que:

$$f = 7,1\% \in I.$$

Ainsi, il n'y a aucune raison de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise.