EXERCICE 3 (Antilles – Guyane 2015)

Partie A

① Exprimons l'affixe du point R en fonction de z :

D'après le graphique, les points M et R sont situés sur le même cercle d'équation : $x^2+y^2=(\text{rayon})^2$.

Ainsi, nous pouvons affirmer que : $OM = OR = \text{rayon}$.

Or comme le point R est sur l'axe des abscisses aussi, nous pouvons écrire :

$$Z_R = |z_R|(\cos\theta + i\sin\theta) \iff Z_R = |z_R|(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$\iff Z_R = |z_R|$$

$$\implies \underline{Z_R = |z|} \quad (|z_R| = |z| \text{ car } OM = OR).$$

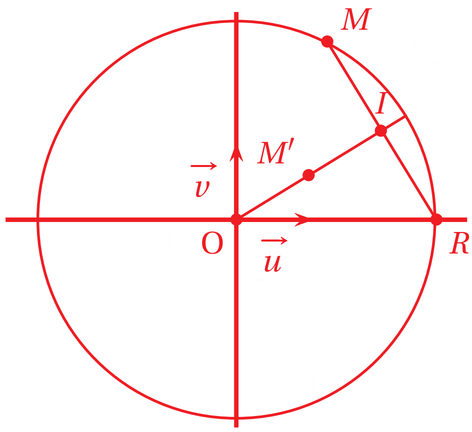
Au total, l'affixe du point R est : $Z_R = |z|$.

② Représentation graphique :

Notons que : • le point d'affixe $\dfrac{z+|z|}{2}$ correspond au point I, milieu du segment [MR] ;

• le point M' est alors le milieu du segment [OI].

D'où le graphique suivant :



Partie B

① Déterminons le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$, quand z_0 est un réel strictement négatif.

Nous avons : $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{4}$, avec : $n \in \mathbb{N}$ et $z_0 \in]-\infty, 0[$.

Notons que : comme $z_0 \in]-\infty,0[$ et $z_0 \in \mathbb{R}$, $|z_0| = -z_0$.

Ayons recours à une démonstration par récurrence.

Nous allons montrer que : si $z_0 \in]-\infty, 0[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = 0$.

Initialisation :

- $z_1 = \dfrac{z_0 + |z_0|}{4} \iff z_1 = \dfrac{z_0 - z_0}{4} \implies z_1 = 0$, vrai.
- $z_2 = \dfrac{z_1 + |z_1|}{4} \iff z_2 = \dfrac{z_1 - z_1}{4} \implies z_2 = 0$, vrai.

Hérédité : Supposons que pour tout entier naturel non nul n, $z_n = 0$ et montrons qu'alors : $z_{n+1} = 0$.

Supposons : $z_n = 0$ (1).

$$(1) \implies z_n + |z_n| = 0$$

$$\implies \frac{z_n + |z_n|}{4} = 0$$

$$\implies z_{n+1} = 0.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, nous avons : $z_n = 0$.

Dans ces conditions : $\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n| = 0$.

Au total : la suite $(|z_n|)$ est convergente et converge vers le point $O(0)$.

② **Déterminons le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$, quand z_0 est un réel strictement positif :**

Nous avons : $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{4}$, avec : $n \in \mathbb{N}$ et $z_0 \in]0, +\infty[$.

Notons que : comme $z_0 \in]0,+\infty[$ et $z_0 \in \mathbb{R}$, $|z_0| = z_0$.

Ayons recours à une démonstration par récurrence.

Nous allons montrer que : si $z_0 \in]0,+\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = \dfrac{z_0}{2^n}$.

Initialisation :

. $z_0 = x \Rightarrow z_0 = \dfrac{x}{2^0}$, vrai. (en posant : $z_0 = x$)

. $z_1 = \dfrac{z_0 + |z_0|}{4} \Leftrightarrow z_1 = \dfrac{x+x}{4} \Rightarrow z_1 = \dfrac{x}{2^1}$ ou $z_1 = \dfrac{z_0}{2^1}$, vrai.

Hérédité : Supposons que pour tout entier naturel n,

$z_n = \dfrac{z_0}{2^n}$ et montrons qu'alors : $z_{n+1} = \dfrac{z_0}{2^{n+1}}$.

Supposons : $z_n = \dfrac{z_0}{2^n}$ (1).

$$(1) \Rightarrow z_n + |z_n| = \frac{z_0}{2^n} + \frac{z_0}{2^n}$$

$$\Rightarrow \frac{z_n + |z_n|}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{z_0}{2^n}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{z_{n+1} = \frac{z_0}{2^{n+1}}} .$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, nous avons : $z_n = \frac{z_0}{2^n}$.

Dans ces conditions : $\lim_{n \to +\infty} |z_n| = \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{z_0}{2^n}\right|$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{z_0}{2^n}$$

$$= 0.$$

Au total : la suite $(|z_n|)$ est convergente et converge vers le point $O(0)$.

③ ⓐ Quelle conjecture si z_0 n'est pas un réel ?

Nous avons : $|z_n| \leq \frac{1}{2}|z_{n-1}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |z_{n-2}| \leq \cdots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$.

D'où : $\lim_{n \to +\infty} |z_n| \leq \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$.

Or : $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0| = 0$, car : $\frac{1}{2} \in]0,1[$.

Au total, comme $|z_n| \geq 0$: $\lim_{n \to +\infty} |z_n| = 0$ (conjecture).

ⓑ Démontrons la conjecture et concluons :

Ayons recours à une démonstration par récurrence.

Nous allons montrer que : si z_0 n'est pas un réel, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|z_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|.$$

Initialisation :

- $|z_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |z_0|$? vrai car : $|z_0| \leq |z_0|$.
- $|z_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^1 |z_0|$?

$$|z_1| = \left| \frac{z_0 + |z_0|}{4} \right| \Longleftrightarrow |z_1| = \frac{1}{4} |z_0 + |z_0||$$

$$\Rightarrow |z_1| \leq \frac{1}{4} \left(|z_0| + ||z_0|| \right)$$

$$\Rightarrow |z_1| \leq \frac{1}{4} \left(|z_0| + |z_0| \right)$$

$$\Rightarrow |z_1| \leq \frac{1}{2} |z_0|$$

$$\Rightarrow |z_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^1 |z_0|$$, donc vrai.

Hérédité: Supposons que pour tout entier naturel n, $|z_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$

et montrons qu'alors : $|z_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |z_0|$.

Supposons. $|z_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$ (1).

$$(1) \Rightarrow z_n + |z_n| \leq z_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$$

$$\Rightarrow \frac{z_n + |z_n|}{4} \leq \frac{z_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|}{4}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{z_n + |z_n|}{4} \right| \leq \left| \frac{z_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|}{4} \right|$$

$$\Rightarrow |z_{n+1}| \leq \frac{1}{4} \left(|z_n| + \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0| \right)$$

$$\Rightarrow |z_{n+1}| \leq \frac{1}{4} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0| + \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0| \right)$$

$$\Rightarrow |z_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |z_0|.$$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$, nous avons: $|z_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$.

Au total : • $0 \leq |z_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$,

- $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0| = 0$,

- d'aprés le théorème des gendarmes, nous pouvons alors affirmer que : $\lim_{n \to +\infty} |z_n| = 0$.

Dans ces conditions: la suite $(|z_n|)$ est convergente et converge vers le point $O(0)$.