

EXERCICE 3 (Antilles - Guyane 2015)

1

Partie A

① Exprimez l'affixe du point R en fonction de z :

D'après le graphique, les points M et R sont situés sur le même cercle d'équation: $x^2 + y^2 = (\text{rayon})^2$.

Ainsi, nous pouvons affirmer que: $OM = OR = \text{rayon}$.

Or comme le point R est sur l'axe des abscisses aussi, nous pouvons écrire :

$$Z_R = |z_R| (\cos \theta + i \sin \theta) \Leftrightarrow Z_R = |z_R| (\cos 0 + i \sin 0)$$

$$\Leftrightarrow Z_R = |z_R|$$

$$\Rightarrow \underline{Z_R = |z|} \quad (|z_R| = |z| \text{ car } OM = OR).$$

Au total, l'affixe du point R est: $Z_R = |z|$.

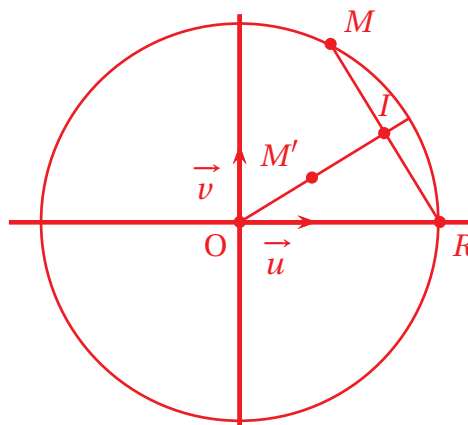
② Représentation graphique :

Notons que :

- le point d'affixe $\frac{z + |z|}{2}$ correspond au point I, milieu du segment [MR];

- le point M' est alors le milieu du segment [OI].

D'où le graphique suivant:



Partie B

① Déterminons le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$, quand z_0 est un réel strictement négatif:

Nous avons: $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}$, avec: $n \in \mathbb{N}$ et $z_0 \in]-\infty, 0[$.

Notons que: comme $z_0 \in]-\infty, 0[$ et $z_0 \in \mathbb{R}$, $|z_0| = -z_0$.

Ayons recours à une démonstration par récurrence.

Nous allons montrer que: si $z_0 \in]-\infty, 0[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = 0$.

Initialisation:

$$\bullet z_1 = \frac{z_0 + |z_0|}{4} \Leftrightarrow z_1 = \frac{z_0 - z_0}{4} \Rightarrow z_1 = 0, \text{ vrai.}$$

$$\bullet z_2 = \frac{z_1 + |z_1|}{4} \Leftrightarrow z_2 = \frac{z_1 - z_1}{4} \Rightarrow z_2 = 0, \text{ vrai.}$$

Hérédité: Supposons que pour tout entier naturel non nul n , $z_n = 0$ et montrons qu'alors: $z_{n+1} = 0$.

Supposons: $z_n = 0$ (1).

$$(1) \Rightarrow z_n + |z_n| = 0$$

$$\Rightarrow \frac{z_n + |z_n|}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{z_{n+1} = 0.}$$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, nous avons: $z_n = 0$.

Dans ces conditions: $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = 0$.

Au total: la suite $(|z_n|)$ est convergente et converge vers le point $O(0)$.

② Déterminons le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$, quand z_0 est un réel strictement positif:

Nous avons: $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}$, avec: $n \in \mathbb{N}$ et $z_0 \in]0, +\infty[$.

Notons que: comme $z_0 \in]0, +\infty[$ et $z_0 \in \mathbb{R}$, $|z_0| = z_0$.

Ayons recours à une démonstration par récurrence.

Nous allons montrer que: si $z_0 \in]0, +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = \frac{z_0}{2^n}$.

Initialisation:

• $z_0 = x \Rightarrow z_0 = \frac{x}{2^0}$, vrai. (en posant: $z_0 = x$)

• $z_1 = \frac{z_0 + |z_0|}{4} \Leftrightarrow z_1 = \frac{x+x}{4} \Rightarrow z_1 = \frac{x}{2^1}$ ou $z_1 = \frac{z_0}{2^1}$, vrai.

Hérédité: Supposons que pour tout entier naturel n ,

$z_n = \frac{z_0}{2^n}$ et montrons qu'alors: $z_{n+1} = \frac{z_0}{2^{n+1}}$.

Supposons: $z_n = \frac{z_0}{2^n}$ (A).

$$\text{①} \Rightarrow z_n + |z_n| = \frac{z_0}{2^n} + \frac{z_0}{2^n}$$

$$\Rightarrow \frac{z_n + |z_n|}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{z_0}{2^n} \right)$$

$$\Rightarrow \underline{z_{n+1} = \frac{z_0}{2^{n+1}}}$$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$, nous avons: $z_n = \frac{z_0}{2^n}$.

Dans ces conditions: $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{z_0}{2^n} \right|$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z_0}{2^n}$$

$$= 0.$$

Au total: la suite $(|z_n|)$ est convergente et converge vers le point $O(0)$.

③ a) Quelle conjecture si z_0 n'est pas un réel?

Nous avons: $|z_n| \leq \frac{1}{2} |z_{n-1}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |z_{n-2}| \leq \dots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|.$

D'où: $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|.$

Or: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0| = 0$, car: $\frac{1}{2} \in]0, 1[$.

Au total, comme $|z_n| \geq 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = 0$ (conjecture).

b) Démontrons la conjecture et concluons:

Ayons recours à une démonstration par récurrence.

Nous allons montrer que: si z_0 n'est pas un réel, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|z_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|.$$

Initialisation:

- $|z_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |z_0|$? Vrai car: $|z_0| \leq |z_0|.$
- $|z_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^1 |z_0|$?

$$|z_1| = \left| \frac{z_0 + |z_0|}{4} \right| \Leftrightarrow |z_1| = \frac{1}{4} |z_0 + |z_0||$$

$$\Rightarrow |z_1| \leq \frac{1}{4} (|z_0| + ||z_0||)$$

$$\Rightarrow |z_1| \leq \frac{1}{4} (|z_0| + |z_0|)$$

$$\Rightarrow |z_1| \leq \frac{1}{2} |z_0|$$

$$\Rightarrow |z_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |z_0|, \text{ donc } \underline{\text{vrai.}}$$

He'rédite': Supposons que pour tout entier naturel n , $|z_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$
et montrons qu'alors : $|z_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |z_0|$.

Supposons $|z_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$ (1).

$$(1) \Rightarrow z_n + |z_n| \leq z_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$$

$$\Rightarrow \frac{z_n + |z_n|}{4} \leq \frac{z_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|}{4}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{z_n + |z_n|}{4} \right| \leq \left| \frac{z_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|}{4} \right|$$

$$\Rightarrow |z_{n+1}| \leq \frac{1}{4} (|z_n| + \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|)$$

$$\Rightarrow |z_{n+1}| \leq \frac{1}{4} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0| + \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0| \right)$$

$$\Rightarrow \underline{|z_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |z_0|}.$$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$, nous avons: $|z_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$.

Au total : $0 \leq |z_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$,

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0| = 0$,

- d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons alors affirmer que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = 0$.

Dans ces conditions: la suite $(|z_n|)$ est convergente et converge vers le point $O(0)$.