Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

B A C C A L A U R É A T   G É N É R A L

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : **9**

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 2 *(5 points)*

Commun à tous les candidats

*La **partie C** peut être traitée indépendamment des parties **A** et **B**.*

Partie A

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

On rappelle que, pour tout réel a strictement positif,

$$P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt .$$

On se propose de calculer l'espérance mathématique de X, notée $E(X)$, et définie par

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{d}t.$$

On note **R** l'ensemble des nombres réels.

On admet que la fonction F définie sur **R** par $F(t) = -\left(t + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$ est une primitive sur **R** de la fonction f définie sur **R** par $f(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.

1. Soit x un nombre réel strictement positif. Vérifier que
$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1\right).$$
2. En déduire que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Partie B

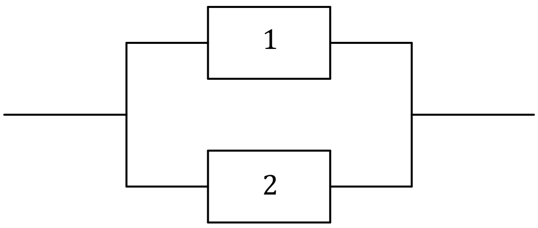
La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

La courbe de la fonction densité associée est représentée en **annexe 2**.

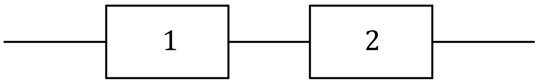
1. Sur le graphique de **l'annexe 2** (*à rendre avec la copie*) :
   - **a.** Représenter la probabilité $P(X \leq 1)$.
   - **b.** Indiquer où se lit directement la valeur de λ.
2. On suppose que $E(X) = 2$.
   - **a.** Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?
   - **b.** Calculer la valeur de λ.
   - **c.** Calculer $P(X \leq 2)$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 0,01 près. Interpréter ce résultat.
   - **d.** Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ? On donnera la valeur exacte.

Partie C

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2.
On note D_1 l'événement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'événement « le composant 2 est défaillant avant un an ».
On suppose que les deux événements D_1 et D_2 sont indépendants et que $P(D_1) = P(D_2) = 0{,}39$.
Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A

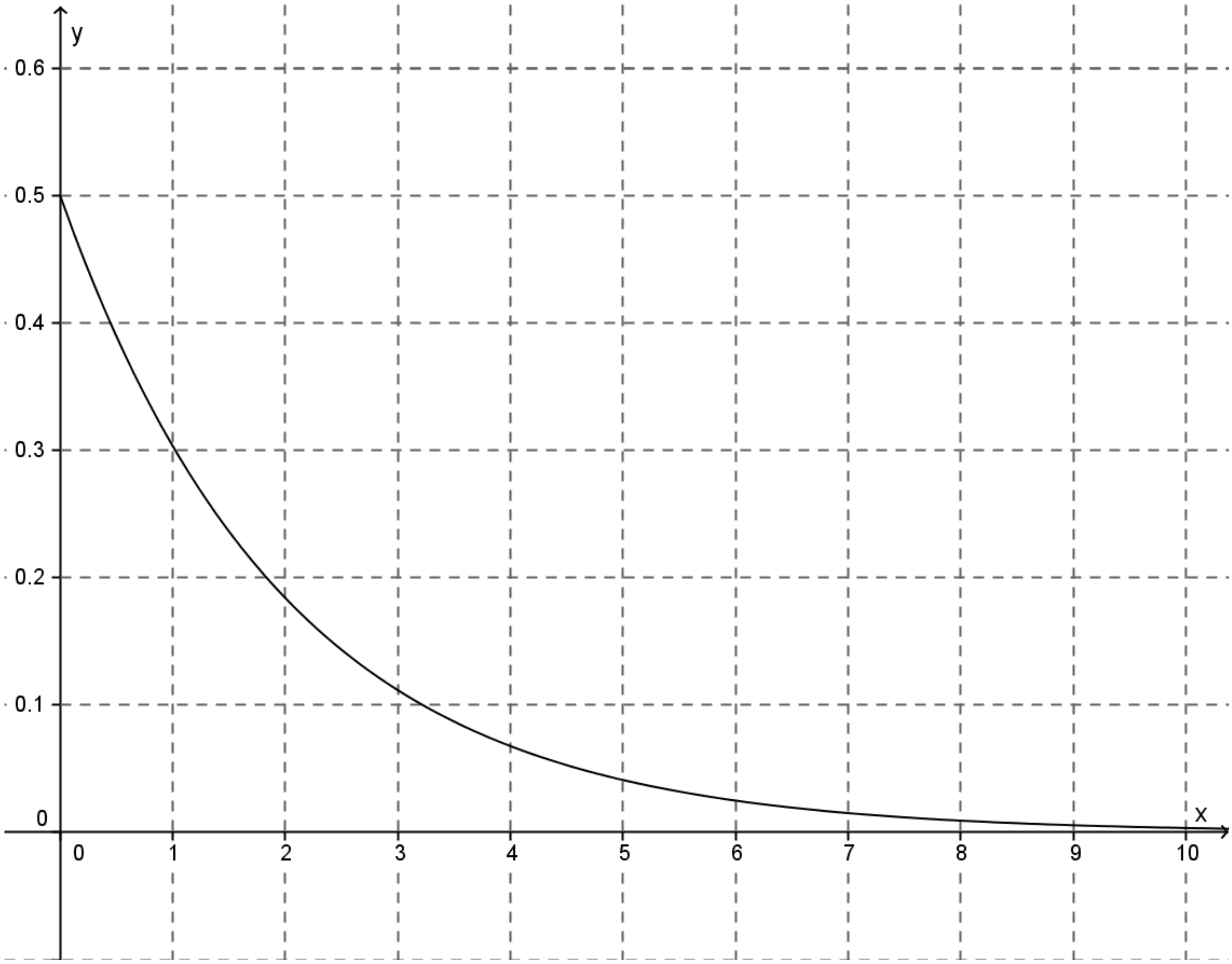


Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 2 de l'exercice 2



EXERCICE 2

[Antilles-Guyane 2015]

Partie A:

1. Vérifions que $\int_0^x \lambda t \, e^{-\lambda t} \, dt = \left(\frac{1}{\lambda}\right)(-\lambda x \, e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1)$: (1)

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Dans ces conditions:

- $f(x) = \lambda \, e^{-\lambda x}$, pour tout $x \in [\, 0 ; +\infty \,[$.
- $P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda \, e^{-\lambda t} \, dt$.
- $E(X) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t \, e^{-\lambda t} \, dt$.

Il s'agit de calculer: $I = \int_0^x \lambda t \, e^{-\lambda t} \, dt$.

Or, la fonction F définie sur IR par $F(t) = -\left(t + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$ est une primitive sur IR de f avec: $f(t) = \lambda t \, e^{-\lambda t}$.

D'où: $I = \left[-\left(t + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} \right]_0^x$

$= -\left(x + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$

$$= \left(\frac{1}{\lambda}\right)\left[-\lambda\, x\, e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1\right].$$

Au total: l'égalité (1) est bien vérifiée.

2. Déduisons-en que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \int_0^{x} \lambda\, t\, e^{-\lambda t}\, dt$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\lambda}\left(-\lambda\, x\, e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1\right)\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -x\, e^{-\lambda x} - \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}$$

Or: • $\lim_{x \to +\infty} -x\, e^{-\lambda x} = 0$ et • $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} = 0$.

Par conséquent: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Au total, nous avons bien: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Partie B:

1. a. Représentation graphique de $P(X \leqslant 1)$:

$P(T \leqslant 1)$ correspond à l'aire (en jaune), en unités d'aire, du graphique:

Voir dernière page de ce corrigé.

1. b. Indiquons où se lit la valeur de λ:

λ correspond à la valeur de l'ordonnée à l'origine.

D'où ici: $\lambda = 0,5$.

2. a. Que représente E (X) ?

E (X) correspond " **au temps moyen** ".

Ici, E (X) est la durée de vie moyenne soit: 2 ans.

2. b. Calculons la valeur de λ:

Précédemment, nous avons vu que: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Or ici: $E(X) = 2$.

D'où: $\lambda = \frac{1}{2}$.

Au total, la valeur de λ est: $\lambda = \frac{1}{2}$.

2. c. Calculons P (X ⩽ 2):

$$P(X \leqslant 2) = \int_0^2 \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt$$

$$= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^2$$

$$= \left[-e^{-\lambda t} \right]_0^2$$

$\Rightarrow$ $P(X \leqslant 2) = 1 - \frac{1}{e}$. **($\approx$ 0,63 au centième près)**

Il y a donc 63% de chance pour que " **un composant électronique ait une durée de vie inférieure à 2 ans** ".

2. d. Déterminons la probabilité demandée:

Il s'agit de calculer: $P(X \geqslant 2)$.

$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 2) \Rightarrow P(X \geqslant 2) \approx 0,37$.

Au total, la probabilité demandée est de: 37%.

À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 2 de l'exercice 2

EXERCICE 2

[Antilles - Guyane 2015]

Partie C: Circuits A et B

1. Calculons la probabilité que le circuit A soit défaillant avant 1 an:

D'après l'énoncé, nous avons:

- D_1 = " le composant 1 est défaillant avant 1 an ".
- D_2 = " le composant 2 est défaillant avant 1 an ".
- A = " le circuit A est défaillant avant 1 an ".
- B = " le circuit B est défaillant avant 1 an ".

- $P(D_1) = 0.39$
- $P(\bar{D}_1) = 0.61$

$(0.39 + 0.61 = 1)$.

- $P(D_2) = 0.39$
- $P(\bar{D}_2) = 0.61$

$(0.39 + 0.61 = 1)$.

Ici, il s'agit de calculer: $P(A)$.

Or: $P(A) = P(D_1 \cap D_2)$

$= P(D_1) \times P(D_2)$.

(car D_1 et D_2 sont indépendantes).

Ainsi: $P(A) = 0.39 \times 0.39$

$\Rightarrow P(A) \approx 15.21\%$.

Au total, la probabilité que le circuit A soit défaillant avant 1 an est de:

15.21%.

2. Calculons la probabilité que le circuit B soit défaillant avant 1 an:

Ici, il s'agit de calculer: $P(B)$.

Or: $P(B) = P(D_1 \cup D_2)$

$= P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2)$

$= P(D_1) + P(D_2) - P(A)$.

Ainsi: $P(B) = 0.39 + 0.39 - 0.1521$

$\Rightarrow P(B) \approx 62.79\%$.

Au total, la probabilité que le circuit B soit défaillant avant 1 an est de:

62.79%.