EXERCICE 4

[Antilles-Guyane 2015]

Partie A:

Faisons fonctionner cet algorithme pour $p = 2$:

- Pour $k = 1$, on affecte à u la valeur:

$$0,5 \times 5 + 0,5\,(1 - 1) - 1,5 = 1.$$

- Pour $k = 2$, on affecte à u la valeur:

$$0,5 \times 1 + 0,5\,(2 - 1) - 1,5 = -\,0,5.$$

En sortie, on obtient donc le nombre: $u = -\,0,5$.

Partie B:

1. Modification de l'algorithme initial:

Nous avons pour tout entier naturel n:

$$\begin{cases} U_{n+1} = 0,5\,U_n + 0,5\,n - 1,5 \\ U_0 = 5 \end{cases}$$

Pour obtenir en sortie toutes les valeurs de U_n pour n variant de 1 à p, le nouvel algorithme est:

Variables:	k et p sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée:	Demander la valeur de p
Traitement:	Affecter à u la valeur 5
	Pour k variant de 1 à p
	Affecter à u la valeur $0,5\,u + 0,5\,(k - 1) - 1,5$
	Afficher u
Sortie:	Fin de pour

2. (U_n) est-elle décroissante à la vue des résultats ?

Le tableau nous indique que:

$$\begin{cases} U_0 > U_1 > U_2 > U_3 \quad (5 > 1 > -0,5 > -0,75) \\ U_4 > U_3 \quad (-0,375 > -0,75). \end{cases}$$

Ainsi, nous ne pouvons rien affirmer du tout sur la décroissance éventuelle de (U_n).

3. Démontrons que $\forall\ n \geqslant 3,\ U_{n+1} > U_n$:

Nous allons montrer par récurrence que:

$$\text{"} \forall\ n \geqslant 3,\ U_{n+1} > U_n \text{"}.$$

Initialisation:
- $U_4 = -0,375 > U_3 = -0,75,$
- $U_5 = 0,5 \times (-0,375) + 0,5 \times 4 - 1,5$

$= 0,3125 > U_4 = -0,375.$

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 3$, supposons $U_{n+1} > U_n$ et montrons qu'alors: $U_{n+2} > U_{n+1}$.

Supposons: $U_{n+1} > U_n$, pour un entier naturel n fixé ($n \geqslant 3$).
(1)

$$\begin{aligned}
(1) &\Rightarrow 0,5\,U_{n+1} > 0,5\,U_n \\
&\Rightarrow 0,5\,U_{n+1} - 1,5 > 0,5\,U_n - 1,5 \\
&\Rightarrow 0,5\,U_{n+1} - 1,5 + 0,5\,n > 0,5\,U_n - 1,5 + 0,5\,n \\
&\Rightarrow 0,5\,U_{n+1} - 1,5 + 0,5\,n + 0,5 > U_{n+1} \\
&\Rightarrow 0,5\,U_{n+1} + 0,5\,(n+1) - 1,5 > U_{n+1} \\
&\Rightarrow U_{n+2} > U_{n+1}.
\end{aligned}$$

Conclusion: Pour tout entier n supérieur à 3, nous avons:

$$U_{n+1} > U_n.$$

Par conséquent, la suite (U_n) est: strictement croissante.

4. Montrons que la suite (V_n) est géométrique de raison $q = 0,5$ et exprimons V_n en fonction de n:

$V_n = 0,1\,U_n - 0,1n + 0,5 \iff V_{n+1} = 0,1\,U_{n+1} - 0,1\,(n+1) + 0,5.$

D'où: $V_{n+1} = 0,1\,(0,5\,U_n + 0,5n - 1,5) - 0,1\,(n+1) + 0,5.$

Or: $V_0 = 0,1 \times U_0 - 0,1 \times 0 + 0,5 \Rightarrow V_0 = 1.$

De plus: $U_n = 10 \times (V_n + 0,1n - 0,5). \Rightarrow U_n = V_n + n + 5.$

Ainsi: $V_{n+1} = 0,1\,(0,5\,[10\,V_n + n - 5] + 0,5n - 1,5) - 0,1n + 0,4$

$\iff V_{n+1} = 0,5 \times V_n + 0,1\,(n-4) - 0,1n + 0,4$

$\Rightarrow \quad V_{n+1} = 0,5 \times V_n.$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $V_0 = 1$.

Ainsi, d'après le cours, nous pouvons écrire:

$V_n = V_0 \times (0,5)^n$ cad: $V_n = (0,5)^n$.

5. Déduisons-en que, pour tout entier n, $U_n = 10 \times (0,5)^n + n - 5$:

Nous savons que: * $V_n = (0,5)^n$

* $U_n = 10\,(V_n + 0,1n - 0,5)$.

D'où: $U_n = 10 \times (0,5)^n + n - 5$.

6. Déterminons la limite de la suite (U_n):

Comme $0,5 \in]0;1[$: $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,5)^n = 0$.

Dans ces conditions:

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (n - 5)$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

En conclusion: (U_n) est une suite divergente.