Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

B A C C A L A U R É A T G É N É R A L

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : **7**

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8,

dont les annexes 1 et 2 pages 7 et 8 sont à rendre avec la copie.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche,
même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements
seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 4 *(5 points)*

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	k et p sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5
	Pour k variant de 1 à p
	Affecter à u la valeur $0{,}5u + 0{,}5(k-1) - 1{,}5$
	Fin de pour
Sortie :	Afficher u

Faire fonctionner cet algorithme pour $p = 2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape. Quel nombre obtient-on en sortie ?

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = 0{,}5u_n + 0{,}5n - 1{,}5.$$

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p.

2. À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p = 4$, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4
u_n	1	$-0{,}5$	$-0{,}75$	$-0{,}375$

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ? Justifier.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$.

Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?

4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0{,}1u_n - 0{,}1n + 0{,}5$.

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors v_n en fonction de n.

5. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 10 \times 0{,}5^n + n - 5.$$

6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4

[Antilles-Guyane 2015]

Partie A:

Faisons fonctionner cet algorithme pour $p = 2$:

- Pour $k = 1$, on affecte à u la valeur:

  $0,5 \times 5 + 0,5\,(1 - 1) - 1,5 = 1.$

- Pour $k = 2$, on affecte à u la valeur:

  $0,5 \times 1 + 0,5\,(2 - 1) - 1,5 = -\,0,5.$

En sortie, on obtient donc le nombre: $u = -\,0,5.$

Partie B:

1. Modification de l'algorithme initial:

Nous avons pour tout entier naturel n:

$$\begin{cases} U_{n+1} = 0,5\,U_n + 0,5\,n - 1,5 \\ U_0 = 5 \end{cases}$$

Pour obtenir en sortie toutes les valeurs de U_n pour n variant de 1 à p, le nouvel algorithme est:

Variables:	k et p sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée:	Demander la valeur de p
Traitement:	Affecter à u la valeur 5
	Pour k variant de 1 à p
	Affecter à u la valeur 0, 5 u + 0, 5 (k - 1) - 1, 5
	Afficher u
Sortie:	Fin de pour

2. (U_n) est-elle décroissante à la vue des résultats ?

Le tableau nous indique que:

$$\begin{cases} U_0 > U_1 > U_2 > U_3 \quad (5 > 1 > -0,5 > -0,75) \\ U_4 > U_3 \quad (-0,375 > -0,75). \end{cases}$$

Ainsi, nous ne pouvons rien affirmer du tout sur la décroissance éventuelle de (U_n).

3. Démontrons que $\forall\ n \geqslant 3,\ U_{n+1} > U_n$:

Nous allons montrer par récurrence que:

$$\text{"} \forall\ n \geqslant 3,\ U_{n+1} > U_n \text{"}.$$

Initialisation:
- $U_4 = -0,375 > U_3 = -0,75$,
- $U_5 = 0,5 \times (-0,375) + 0,5 \times 4 - 1,5$

  $= 0,3125 > U_4 = -0,375.$

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 3$, supposons $U_{n+1} > U_n$ et montrons qu'alors: $U_{n+2} > U_{n+1}$.

Supposons: $U_{n+1} > U_n$, pour un entier naturel n fixé ($n \geqslant 3$).
(1)

$$(1) \Rightarrow 0,5\,U_{n+1} > 0,5\,U_n$$
$$\Rightarrow 0,5\,U_{n+1} - 1,5 > 0,5\,U_n - 1,5$$
$$\Rightarrow 0,5\,U_{n+1} - 1,5 + 0,5\,n > 0,5\,U_n - 1,5 + 0,5\,n$$
$$\Rightarrow 0,5\,U_{n+1} - 1,5 + 0,5\,n + 0,5 > U_{n+1}$$
$$\Rightarrow 0,5\,U_{n+1} + 0,5\,(n+1) - 1,5 > U_{n+1}$$
$$\Rightarrow U_{n+2} > U_{n+1}.$$

Conclusion: Pour tout entier n supérieur à 3, nous avons:

$$U_{n+1} > U_n.$$

Par conséquent, la suite (U_n) est: strictement croissante.

4. Montrons que la suite (V_n) est géométrique de raison $q = 0,5$ et exprimons V_n en fonction de n:

$V_n = 0,1\,U_n - 0,1\,n + 0,5 \iff V_{n+1} = 0,1\,U_{n+1} - 0,1\,(n+1) + 0,5.$

D'où: $V_{n+1} = 0,1\,(0,5\,U_n + 0,5\,n - 1,5) - 0,1\,(n+1) + 0,5.$

Or: $V_0 = 0,1 \times U_0 - 0,1 \times 0 + 0,5 \Rightarrow V_0 = 1.$

De plus: $U_n = 10 \times (V_n + 0,1\,n - 0,5). \Rightarrow U_n = V_n + n + 5.$

Ainsi: $V_{n+1} = 0,1\,(0,5\,[10\,V_n + n - 5] + 0,5\,n - 1,5) - 0,1\,n + 0,4$

$\iff V_{n+1} = 0,5 \times V_n + 0,1\,(n-4) - 0,1\,n + 0,4$

$\Rightarrow \quad V_{n+1} = 0,5 \times V_n$.

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $V_0 = 1$.

Ainsi, d'après le cours, nous pouvons écrire:

$V_n = V_0 \times (0,5)^n$ cad: $V_n = (0,5)^n$.

5. Déduisons-en que, pour tout entier n, $U_n = 10 \times (0,5)^n + n - 5$:

Nous savons que: * $V_n = (0,5)^n$

* $U_n = 10\,(V_n + 0,1n - 0,5)$.

D'où: $U_n = 10 \times (0,5)^n + n - 5$.

6. Déterminons la limite de la suite (U_n):

Comme $0,5 \in \,]0;1[$: $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,5)^n = 0$.

Dans ces conditions:

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (n - 5)$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

En conclusion: (U_n) est une suite divergente.