Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

B A C C A L A U R É A T   G É N É R A L

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série : S

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : **7**

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8,

dont les annexes 1 et 2 pages 7 et 8 sont à rendre avec la copie.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

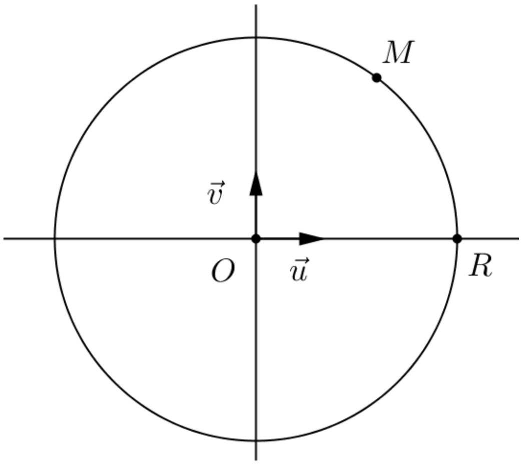
EXERCICE 3 *(4 points)*

Commun à tous les candidats

Partie A

On appelle **C** l'ensemble des nombres complexes.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$ on a placé un point M d'affixe z appartenant à **C**, puis le point R intersection du cercle de centre O passant par M et du demi-axe $[O\ ;\ \vec{u})$.



1. Exprimer l'affixe du point R en fonction de z.
2. Soit le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{1}{2}\left(\frac{z + |z|}{2}\right).$$

Reproduire la figure sur la copie et construire le point M'.

Partie B

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par un premier terme z_0 appartenant à **C** et, pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}.$$

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ dépend du choix de z_0.

1. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel négatif ?
2. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel positif ?
3. On suppose désormais que z_0 n'est pas un nombre réel.
   - **a.** Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$?
   - **b.** Démontrer cette conjecture, puis conclure.

EXERCICE 3 (Antilles _ Guyane 2015)

Partie A

① Exprimons l'affixe du point R en fonction de z :

D'après le graphique, les points M et R sont situés sur le même cercle d'équation : $x^2+y^2=(\text{rayon})^2$.

Ainsi, nous pouvons affirmer que : $OM = OR = \text{rayon}$.

Or comme le point R est sur l'axe des abscisses aussi, nous pouvons écrire :

$$Z_R = |z_R|(\cos\theta + i\sin\theta) \Leftrightarrow Z_R = |z_R|(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$\Leftrightarrow Z_R = |z_R|$$

$$\Rightarrow \underline{Z_R = |z|} \quad (|z_R| = |z| \text{ car } OM = OR).$$

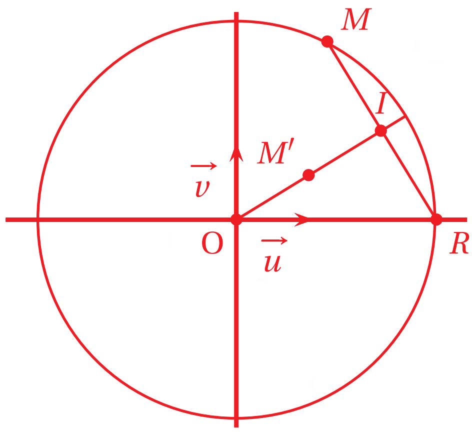
Au total, l'affixe du point R est : $Z_R = |z|$.

② Représentation graphique :

Notons que : • le point d'affixe $\frac{z+|z|}{2}$ correspond au point I, milieu du segment [MR] ;

• le point M' est alors le milieu du segment [OI].

D'où le graphique suivant :



Partie B

① **Déterminons le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$, quand z_0 est un réel strictement négatif.**

Nous avons : $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{4}$, avec : $n \in \mathbb{N}$ et $z_0 \in]-\infty, 0[$.

Notons que : comme $z_0 \in]-\infty, 0[$ et $z_0 \in \mathbb{R}$, $|z_0| = -z_0$.

Ayons recours à une démonstration par récurrence.

Nous allons montrer que : si $z_0 \in]-\infty, 0[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = 0$.

Initialisation :

- $z_1 = \dfrac{z_0 + |z_0|}{4} \Leftrightarrow z_1 = \dfrac{z_0 - z_0}{4} \Rightarrow z_1 = 0$, vrai.
- $z_2 = \dfrac{z_1 + |z_1|}{4} \Leftrightarrow z_2 = \dfrac{z_1 - z_1}{4} \Rightarrow z_2 = 0$, vrai.

Hérédité : Supposons que pour tout entier naturel non nul n, $z_n = 0$ et montrons qu'alors : $z_{n+1} = 0$.

Supposons : $z_n = 0$ (1).

$$(1) \Rightarrow z_n + |z_n| = 0$$

$$\Rightarrow \frac{z_n + |z_n|}{4} = 0$$

$$\Rightarrow z_{n+1} = 0.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, nous avons : $z_n = 0$.

Dans ces conditions : $\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n| = 0$.

Au total : la suite $(|z_n|)$ est convergente et converge vers le point $O(0)$.

② Déterminons le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$, quand z_0 est un réel strictement positif :

Nous avons : $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}$, avec : $n \in \mathbb{N}$ et $z_0 \in]0,+\infty[$.

Notons que : comme $z_0 \in]0,+\infty[$ et $z_0 \in \mathbb{R}$, $|z_0| = z_0$.

Ayons recours à une démonstration par récurrence.

Nous allons montrer que : si $z_0 \in]0,+\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = \frac{z_0}{2^n}$.

Initialisation :

. $z_0 = x \Rightarrow z_0 = \frac{x}{2^0}$, vrai. (en posant : $z_0 = x$)

. $z_1 = \frac{z_0 + |z_0|}{4} \Leftrightarrow z_1 = \frac{x+x}{4} \Rightarrow z_1 = \frac{x}{2^1}$ ou $z_1 = \frac{z_0}{2^1}$, vrai.

Hérédité : Supposons que pour tout entier naturel n,

$z_n = \frac{z_0}{2^n}$ et montrons qu'alors : $z_{n+1} = \frac{z_0}{2^{n+1}}$.

Supposons : $z_n = \frac{z_0}{2^n}$ (1).

$$(1) \Rightarrow z_n + |z_n| = \frac{z_0}{2^n} + \frac{z_0}{2^n}$$

$$\Rightarrow \frac{z_n + |z_n|}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{z_0}{2^n}\right)$$

$$\Rightarrow z_{n+1} = \frac{z_0}{2^{n+1}}.$$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$, nous avons : $z_n = \frac{z_0}{2^n}$.

Dans ces conditions : $\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n| = \lim\limits_{n \to +\infty} \left|\frac{z_0}{2^n}\right|$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{z_0}{2^n}$

$= 0.$

Au total : la suite $(|z_n|)$ est convergente et converge vers le point $O(0)$.

③ ⓐ Quelle conjecture si z_0 n'est pas un réel ?

Nous avons : $|z_n| \leq \frac{1}{2}|z_{n-1}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |z_{n-2}| \leq \cdots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$.

D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n| \leq \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$.

Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0| = 0$, car : $\frac{1}{2} \in]0,1[$.

Au total, comme $|z_n| \geq 0$: $\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n| = 0$ (conjecture).

ⓑ Démontrons la conjecture et concluons :

Ayons recours à une démonstration par récurrence.

Nous allons montrer que : si z_0 n'est pas un réel, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|z_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|.$$

Initialisation :

- $|z_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |z_0|$? Vrai car : $|z_0| \leq |z_0|$.
- $|z_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^1 |z_0|$?

$$|z_1| = \left|\frac{z_0 + |z_0|}{4}\right| \iff |z_1| = \frac{1}{4}\,|z_0 + |z_0||$$

$$\implies |z_1| \leq \frac{1}{4}\left(|z_0| + ||z_0||\right)$$

$$\implies |z_1| \leq \frac{1}{4}\left(|z_0| + |z_0|\right)$$

$$\implies |z_1| \leq \frac{1}{2}\,|z_0|$$

$$\implies |z_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^1 |z_0| \text{, donc vrai.}$$

Hérédité: Supposons que pour tout entier naturel n, $|z_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$

et montrons qu'alors : $|z_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |z_0|$.

Supposons. $|z_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$ (1).

$$(1) \implies z_n + |z_n| \leq z_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$$

$$\implies \frac{z_n + |z_n|}{4} \leq \frac{z_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|}{4}$$

$$\implies \left|\frac{z_n + |z_n|}{4}\right| \leq \left|\frac{z_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|}{4}\right|$$

$$\implies |z_{n+1}| \leq \frac{1}{4}\left(|z_n| + \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|\right)$$

$$\implies |z_{n+1}| \leq \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0| + \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|\right)$$

$$\implies |z_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |z_0|.$$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$, nous avons: $|z_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$.

Au total : . $0 \leq |z_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$,

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0| = 0$,

- d'aprés le théoréme des gendarmes, nous pouvons alors affirmer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n| = 0$.

Dans ces conditions: la suite $(|z_n|)$ est convergente et converge vers le point $O(0)$.