EXERCICE 2

[Antilles-Guyane 2015]

Partie A:

1. Vérifions que $\int_0^x \lambda t\, e^{-\lambda t}\, dt = \left(\frac{1}{\lambda}\right)(-\lambda\, x\, e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1)$: (1)

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Dans ces conditions:

- $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$, pour tout $x \in [\, 0\,; +\infty\, [$.
- $P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt$.
- $E(X) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t\, e^{-\lambda t}\, dt$.

Il s'agit de calculer: $I = \int_0^x \lambda t\, e^{-\lambda t}\, dt$.

Or, la fonction F définie sur IR par $F(t) = -\left(t + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$ est une primitive sur IR de f avec: $f(t) = \lambda t\, e^{-\lambda t}$.

D'où: $I = \left[-\left(t + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} \right]_0^x$

$= -\left(x + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$

$$= \left(\frac{1}{\lambda}\right)[-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1].$$

Au total: l'égalité **(1)** est bien vérifiée.

2. Déduisons-en que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$:

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1\right)\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -x e^{-\lambda x} - \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}$$

Or: • $\lim\limits_{x \to +\infty} -x e^{-\lambda x} = 0$ **et** • $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} = 0.$

Par conséquent: $E(X) = \frac{1}{\lambda}.$

Au total, nous avons bien: $E(X) = \frac{1}{\lambda}.$

Partie B:

1. a. Représentation graphique de $P(X \leqslant 1)$:

$P(T \leqslant 1)$ correspond à l'aire (en jaune), en unités d'aire, du graphique:

Voir dernière page de ce corrigé.

1. b. Indiquons où se lit la valeur de λ:

λ correspond à la valeur de l'ordonnée à l'origine.

D'où ici: $\lambda = 0,5$.

2. a. Que représente E (X) ?

E (X) correspond " **au temps moyen** ".

Ici, E (X) est la durée de vie moyenne soit: 2 ans.

2. b. Calculons la valeur de λ:

Précédemment, nous avons vu que: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Or ici: $E(X) = 2$.

D'où: $\lambda = \frac{1}{2}$.

Au total, la valeur de λ est: $\lambda = \frac{1}{2}$.

2. c. Calculons P (X ⩽ 2):

$$P(X \leqslant 2) = \int_0^2 \lambda \, e^{-\lambda t} \, dt$$

$$= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^2$$

$$= \left[-e^{-\lambda t} \right]_0^2$$

$$\Rightarrow \quad P(X \leqslant 2) = 1 - \frac{1}{e}. \quad (\approx 0,63 \text{ au centième près})$$

Il y a donc 63% de chance pour que " **un composant électronique ait une durée de vie inférieure à 2 ans** ".

2. d. Déterminons la probabilité demandée:

Il s'agit de calculer: $P(X \geq 2)$.

$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 2) \Rightarrow P(X \geq 2) \approx 0,37$.

Au total, la probabilité demandée est de: 37%.

À RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 2 de l'exercice 2

EXERCICE 2

[Antilles - Guyane 2015]

Partie C: Circuits A et B

1. Calculons la probabilité que le circuit A soit défaillant avant 1 an:

D'après l'énoncé, nous avons:

- D_1 = " le composant 1 est défaillant avant 1 an ".
- D_2 = " le composant 2 est défaillant avant 1 an ".
- A = " le circuit A est défaillant avant 1 an ".
- B = " le circuit B est défaillant avant 1 an ".

- $P(D_1) = 0.39$
- $P(\bar{D}_1) = 0.61$

($0.39 + 0.61 = 1$).

- $P(D_2) = 0.39$
- $P(\bar{D}_2) = 0.61$

($0.39 + 0.61 = 1$).

Ici, il s'agit de calculer: $P(A)$.

Or: $P(A) = P(D_1 \cap D_2)$

$= P(D_1) \times P(D_2)$.

(car D_1 et D_2 sont indépendantes).

Ainsi: $P(A) = 0.39 \times 0.39$

$\Rightarrow P(A) \approx 15.21\%$.

Au total, la probabilité que le circuit A soit défaillant avant 1 an est de:

15.21%.

2. Calculons la probabilité que le circuit B soit défaillant avant 1 an:

Ici, il s'agit de calculer: $P(B)$.

Or: $P(B) = P(D_1 \cup D_2)$

$= P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2)$

$= P(D_1) + P(D_2) - P(A)$.

Ainsi: $P(B) = 0.39 + 0.39 - 0.1521$

$\Rightarrow P(B) \approx 62.79\%$.

Au total, la probabilité que le circuit B soit défaillant avant 1 an est de:

62.79%.