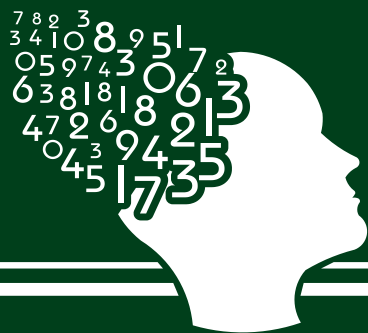


Corrigé

Exercice 2



freemaths.fr

LES MATHÉMATIQUES

AU BACCALAURÉAT S

NOMBRES COMPLEXES, BAC S

- *Affixe d'un nombre complexe*
- *Écriture algébrique d'un nombre complexe*
- *Nombre complexe conjugué*
- *Écriture géométrique d'un nombre complexe*
- *Écriture trigonométrique d'un nombre complexe*
- *Argument d'un nombre complexe*
- *Module d'un nombre complexe*
- *Partie imaginaire d'un nombre complexe*
- *Partie réelle d'un nombre complexe*
- *Représentation géométrique d'un nombre complexe*
- *Triangle équilatéral direct*

EXERCICE 2

[Amérique du Nord 2019]

1. L'affirmation 1 est: **Fausse.**

En effet, soit l'équation: $z - i = i(z + 1)$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow z - i = iz + i \Leftrightarrow z(1 - i) = 2i \Leftrightarrow z = \frac{2i}{1 - i} \text{ cad: } z = -1 + i.$$

• Le module de " $-1 + i$ " est: $|-1 + i| = \sqrt{2}$.

• Soit θ , l'argument de " $-1 + i$ ":

$$\begin{aligned} -1 + i &= \sqrt{2} (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Par identification:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Au total: $z = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \neq \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$

2. L'affirmation 2 est: **Fausse.**

En effet, soit un réel $x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$:

$$1 + e^{2ix} = 1 + (\cos(2x) + i \sin(2x))$$

$$= (1 + \cos(2x)) + i \sin(2x)$$

$$= 2 \cos^2 x + 2i \sin x \cos x, \text{ car: } \bullet \cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\bullet \sin(2x) = 2 \sin x \cos x.$$

$$\text{D'où: } 1 + e^{2ix} = 2 \cos x [\cos x + i \sin x] \text{ cad: } 1 + e^{2ix} = 2 \cos x \times e^{ix}.$$

$$\text{Au total: } 1 + e^{2ix} = 2 \cos x \times e^{ix} \neq 2 \cos x \times e^{-ix}.$$

3. L'affirmation 3 est: **Vraie.**

En effet, soit M le point d'affixe: $z = x + iy$.

$$|z - i| = |z + 1| \Leftrightarrow |x + iy - i| = |x + iy + 1|$$

$$\Leftrightarrow |x + i(y - 1)| = |(x + 1) + iy|$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = (x + 1)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 1 - 2y = x^2 + 1 + 2x + y^2$$

$$\Leftrightarrow -2y = 2x \text{ ou encore: } y = -x.$$

Au total: le point M appartient bien à la droite d'équation $y = -x$.

4. L'affirmation 4 est: **Fausse.**

En effet, soit l'équation: $z^5 + z - i + 1 = 0$ (2).

Ici: $z = x \in \mathbb{R}$, car: z est un réel.

Dans ces conditions: (2) $\Leftrightarrow x^5 + x + 1 = i$.

Or: $x^5 + x + 1 \in \mathbb{R}$ et nous ne pouvons donc pas avoir: $x^5 + x + 1 = i$.

Au total: $z^5 + z + 1 \neq i$.