Sujet Spécialité

MATHÉMATIQUES

AMÉRIQUE DU NORD

BAC S - 2018

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU MARDI 29 MAI 2018

MATHÉMATIQUES

– Série S –

Enseignement Spécialité Coefficient : 9

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1 à 7.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans une région, on s'intéresse à la cohabitation de deux espèces animales : les campagnols et les renards, les renards étant les prédateurs des campagnols. Au 1er juillet 2012, on estime qu'il y a dans cette région approximativement deux millions de campagnols et cent-vingt renards.
On note u_n le nombre de campagnols et v_n le nombre de renards au 1er juillet de l'année $2012+n$.

Partie A - Un modèle simple

On modélise l'évolution des populations par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1,1u_n - 2000v_n \\ v_{n+1} = 2\times 10^{-5}u_n + 0,6v_n \end{cases} \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 0, \text{ avec } u_0 = 2\,000\,000 \text{ et } v_0 = 120.$$

1.a) On considère la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geqslant 0$.
Déterminer la matrice A telle que $U_{n+1} = A \times U_n$ pour tout entier n et donner la matrice U_0.

b) Calculer le nombre de campagnols et de renards estimés grâce à ce modèle au 1er juillet 2018.

2. Soit les matrices $P = \begin{pmatrix} 20\,000 & 5\,000 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{15\,000} \times \begin{pmatrix} 1 & -5\,000 \\ -1 & 20\,000 \end{pmatrix}$.
On admet que P^{-1} est la matrice inverse de la matrice P et que $A = P \times D \times P^{-1}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$.

b) Donner sans justification l'expression de la matrice D^n en fonction de n.

c) On admet que, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_n = \dfrac{2,8\times 10^7 + 2\times 10^6 \times 0,7^n}{15} \\ v_n = \dfrac{1\,400 + 400 \times 0,7^n}{15} \end{cases}$$

Décrire l'évolution des deux populations.

Partie B - Un modèle plus conforme à la réalité

Dans la réalité, on observe que si le nombre de renards a suffisamment baissé, alors le nombre de campagnols augmente à nouveau, ce qui n'est pas le cas avec le modèle précédent. On construit donc un autre modèle, plus précis, qui tient compte de ce type d'observations à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1,1u_n - 0,001u_n \times v_n \\ v_{n+1} = 2\times 10^{-7}u_n \times v_n + 0,6v_n \end{cases} \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 0, \text{ avec } u_0 = 2\,000\,000 \text{ et } v_0 = 120.$$

Le tableau ci-dessous présente ce nouveau modèle sur les 25 premières années en donnant les effectifs des populations arrondis à l'unité :

	A	B	C
1	Modèle de la **partie B**		
2	n	u_n	v_n
3	0	2 000 000	120
4	1	1 960 000	120
5	2	1 920 800	119
6	3	1 884 228	117
7	4	1 851 905	114
8	5	1 825 160	111
9	6	1 804 988	107
10	7	1 792 049	103
11	8	1 786 692	99
12	9	1 789 005	94
13	10	1 798 854	91
14	11	1 815 930	87
15	12	1 839 780	84
16	13	1 869 827	81
17	14	1 905 378	79
18	15	1 945 622	77
19	16	1 989 620	77
20	17	2 036 288	76
21	18	2 084 374	77
22	19	2 132 440	78
23	20	2 178 846	80
24	21	2 221 746	83
25	22	2 259 109	87
26	23	2 288 766	91
27	24	2 308 508	97

1. Quelles formules faut-il écrire dans les cellules B4 et C4 et recopier vers le bas pour remplir les colonnes B et C ?
2. Avec le deuxième modèle, à partir de quelle année observe-t-on le phénomène décrit (baisse des renards et hausse des campagnols) ?

Partie C

Dans cette partie on utilise le modèle de la partie B.
Est-il possible de donner à u_0 et v_0 des valeurs afin que les deux populations restent stables d'une année sur l'autre, c'est-à-dire telles que pour tout entier naturel n on ait $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = v_n$?
(On parle alors d'état stable.)

EXERCICE 4

[Amérique du Nord 2018]

Partie A: Un modèle simple

1. a. a1. Déterminons la matrice A telle que $U_{n+1} = A \times U_n$, pour tout entier $n \geqslant 0$:

D'après l'énoncé: $\begin{cases} u_{n+1} = 1,1\, u_n - 2\,000\, v_n \\ v_{n+1} = 2 \times 10^{-5}\, u_n + 0,6\, v_n \end{cases}$ **(I)**, pour tout entier $n \geqslant 0$.

Dans ces conditions: **(I)** $\iff \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & -2\,000 \\ 2 \times 10^{-5} & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

$\iff U_{n+1} = A \times U_n$,

avec: $U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1,1 & -2\,000 \\ 2 \times 10^{-5} & 0,6 \end{pmatrix}$.

1. a. a2. Déterminons U_0:

La matrice U_0 est: $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, d'où: $U_0 = \begin{pmatrix} 2\,000\,000 \\ 120 \end{pmatrix}$.

Au total, pour tout entier $n \geqslant 0$: $U_0 = \begin{pmatrix} 2\,000\,000 \\ 120 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1,1 & -2\,000 \\ 2 \times 10^{-5} & 0,6 \end{pmatrix}$.

1. b. Calculons le nombre de campagnols et de renards estimés grâce à ce modèle au 1er juillet 2018:

En 2018, $\mathbf{n = 6}$ car: $2012 + 6 = 2018$.

Or d'après le cours: *si pour tout entier $n \geq 0$, $U_{n+1} = A \times U_n$, alors $U_n = A^n \times U_0$.*

D'où ici: $\mathbf{U_6 = A^6 \times U_0}$.

$$U_6 = A^6 \times U_0 \iff \begin{pmatrix} u_6 \\ v_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & -2\,000 \\ 2 \times 10^{-5} & 0,6 \end{pmatrix}^6 \times \begin{pmatrix} 2\,000\,000 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons:

$$U_6 = \begin{pmatrix} u_6 \\ v_6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1\,882\,352 \\ 96 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, au 1er juillet 2018, il y aura environ:
- $u_6 \approx 1\,882\,352$ campagnols
- $v_6 \approx 96$ renards.

2. a. Montrons que pour tout entier naturel n, $U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$:

Il est admis que: $\mathbf{A = P \times D \times P^{-1}}$, d'après l'énoncé.

Dans ces conditions: $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$ **(1)**, pour tout entier naturel n.

Nous allons montrer par récurrence l'égalité **(1)** cad que:

" pour tout entier naturel n: $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$ ".

Initialisation: • $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ **(I_2 étant la matrice identité d'ordre 2)**.

• Et: $P \times D^0 \times P^{-1} = P \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times P^{-1}$

$= P \times I_2 \times P^{-1}$

$= P \times P^{-1}$

$= I_2$, car P^{-1} est la matrice inverse de P,

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

• D'où: $A^0 = P \times D^0 \times P^{-1}$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $A^n = P\ D^n\ P^{-1}$

et montrons qu'alors: $A^{(n+1)} = P\ D^{(n+1)}\ P^{-1}$.

Supposons: $A^n = P\ D^n\ P^{-1}$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

(1) $\Rightarrow$ $A^n \times A = (P\ D^n\ P^{-1}) \times (P\ D\ P^{-1})$

$\Rightarrow A^n \times A = P\ D^n\ P^{-1} \times P\ D\ P^{-1}$

$\Rightarrow A^n \times A = P\ D^n\ (P^{-1}\ P)\ D\ P^{-1}$

$\Rightarrow A^n \times A = P\ D^n\ (I_2)\ D\ P^{-1}$

$\Rightarrow A^n \times A = P\ D^n\ D\ P^{-1}$

$\Rightarrow A^{(n+1)} = P\ D^{(n+1)} \times P^{-1}$.

Conclusion: pour tout entier naturel n, nous avons: $A^n = P\ D^n\ P^{-1}$.

Et donc, pour tout entier naturel n: $U_n = A^n \times U_0$

cad: $U_n = P \times D^n \times P^{-1} \times U_0$.

2. b. Donnons l'expression de la matrice D^n en fonction de n:

Nous savons que: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0,7 \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions: $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (0,7)^n \end{pmatrix}$.

Au total, pour tout entier naturel n: $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0,7)^n \end{pmatrix}$.

2. c. Décrivons l'évolution des deux populations:

En ce qui concerne la suite (U_n):

- Pour tout entier naturel n, nous avons: $U_{n+1} - U_n = \dfrac{2 \times 10^6}{15} \times (0,7^{n+1} - 0,7^n)$

$$= \frac{2 \times 10^6 \times 0,7^n}{15} (0,7 - 1)$$

$$= \frac{-0,6 \times 10^6 \times 0,7^n}{15} < 0.$$

D'où: la suite (U_n) est strictement décroissante.

- De plus, pour tout entier naturel n, nous avons aussi:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{2,8 \times 10^7 + 2 \times 10^6 \times 0,7^n}{15}$$

$$= \frac{2,8 \times 10^7}{15} \quad \text{car: } 0,7 \in]0;1[, \text{ et donc: } \lim_{n \to +\infty} (0,7)^n = 0.$$

Ainsi: la population de campagnols va décroître dans le temps et au bout de n années (" n " très grand), cette dernière se stabilisera autour de $\frac{2,8 \times 10^7}{15}$ individus.

En ce qui concerne la suite (V_n):

- Pour tout entier naturel n, nous avons: $V_{n+1} - V_n = \frac{400}{15} \times (0,7^{n+1} - 0,7^n)$

$$= \frac{400 \times 0,7^n}{15} (0,7 - 1)$$

$$= \frac{-120 \times 0,7^n}{15} < 0.$$

D'où: la suite (V_n) est strictement décroissante.

- De plus, pour tout entier naturel n, nous avons aussi:

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1400 + 400 \times 0,7^n}{15}$$

$$= \frac{1400}{15} \quad \text{car: } 0,7 \in]0;1[, \text{ et donc: } \lim_{n \to +\infty} (0,7)^n = 0.$$

Ainsi: la population de renards va décroître dans le temps et au bout de n années (" n " très grand), cette dernière se stabilisera autour de $\frac{1400}{15}$ individus.

Partie B: Un modèle plus conforme à la réalité

1. Déterminons quelles formules il faut écrire dans les cellules B_4 et C_4:

Les formules sont:

- **En B_4:** on entre << = 1, 1 * B_3 - 0, 001 * B_3 * C_3 >>.
- **En C_4:** on entre << = 2 * 10 ^ (-7) * B_3 * C_3 + 0, 6 * C_3 >>.

2. A partir de quelle année observe-t-on le phénomène décrit ?

Le phénomène " **baisse des renards et hausse des campagnols** " s'observe à partir de: $n = 9$ cad à partir de: 2021.

Partie C:

Déterminons U_0 et V_0 telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n$ et $V_{n+1} = V_n$:

Il s'agit ici de déterminer l'état stable ou état stationnaire.

Pour cela nous allons résoudre le système: $\begin{cases} U_{n+1} = U_n \\ V_{n+1} = V_n \end{cases}$.

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n \\ V_{n+1} = V_n \end{cases} \iff \begin{cases} 1,1\, U_n - 0,001\, U_n \times V_n = U_n \\ 2 \times 10^{-7}\, U_n \times V_n + 0,6\, V_n = V_n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0,1\, U_n - 0,001\, U_n \times V_n = 0 \\ 2 \times 10^{-7}\, U_n \times V_n - 0,4\, V_n = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} U_n \times [\,0,1 - 0,001\, V_n\,] = 0 \\ V_n \times [\,2 \times 10^{-7}\, U_n - 0,4\,] = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} U_n = 0 \text{ ou } V_n = 100 \\ V_n = 0 \text{ ou } U_n = 2\,000\,000 \end{cases}$$

Or, nous retiendrons: $U_n = 2\,000\,000$ et $V_n = 100$.

En effet: " $U_n = 0$ et $V_n = 0$ " n'a aucune signification !

Au total l'état stable est possible à partir du moment où:

- $U_0 = U_1 = U_2 = ... = U_n = 2\,000\,000$ de campagnols,
- $V_0 = V_1 = V_2 = ... = V_n = 100$ renards.