

# Sujet Obligatoire

MATHÉMATIQUES  
AMÉRIQUE DU NORD  
BAC S - 2018



---

---

freemaths.fr

---

---

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU MARDI 29 MAI 2018

## MATHÉMATIQUES

– Série S –

Enseignement Obligatoire Coefficient : 7

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,  
conformément à la réglementation en vigueur.

*Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.*

*Le candidat doit traiter tous les exercices.*

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1 à 8.

## EXERCICE 1 (6 points)

### Commun à tous les candidats

On étudie certaines caractéristiques d'un supermarché d'une petite ville.

#### Partie A - Démonstration préliminaire

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,2.

On rappelle que l'espérance de la variable aléatoire  $X$ , notée  $E(X)$ , est égale à :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x 0,2t e^{-0,2t} dt.$$

Le but de cette partie est de démontrer que  $E(X) = 5$ .

1. On note  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par  $g(t) = 0,2t e^{-0,2t}$ .  
On définit la fonction  $G$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par  $G(t) = (-t - 5) e^{-0,2t}$ .  
Vérifier que  $G$  est une primitive de  $g$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

2. En déduire que la valeur exacte de  $E(X)$  est 5.

*Indication : on pourra utiliser, sans le démontrer, le résultat suivant :*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-0,2x} = 0.$$

#### Partie B - Étude de la durée de présence d'un client dans le supermarché

Une étude commandée par le gérant du supermarché permet de modéliser la durée, exprimée en minutes, passée dans le supermarché par un client choisi au hasard par une variable aléatoire  $T$ . Cette variable  $T$  suit une loi normale d'espérance 40 minutes et d'écart type un réel positif noté  $\sigma$ . Grâce à cette étude, on estime que  $P(T < 10) = 0,067$ .

1. Déterminer une valeur arrondie du réel  $\sigma$  à la seconde près.
2. Dans cette question, on prend  $\sigma = 20$  minutes. Quelle est alors la proportion de clients qui passent plus d'une heure dans le supermarché ?

#### Partie C - Durée d'attente pour le paiement

Ce supermarché laisse le choix au client d'utiliser seul des bornes automatiques de paiement ou bien de passer par une caisse gérée par un opérateur.

1. La durée d'attente à une borne automatique, exprimée en minutes, est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre  $0,2 \text{ min}^{-1}$ .
  - a) Donner la durée moyenne d'attente d'un client à une borne automatique de paiement.
  - b) Calculer la probabilité, arrondie à  $10^{-3}$ , que la durée d'attente d'un client à une borne automatique de paiement soit supérieure à 10 minutes.
2. L'étude commandée par le gérant conduit à la modélisation suivante :
  - parmi les clients ayant choisi de passer à une borne automatique, 86 % attendent moins de 10 minutes ;
  - parmi les clients passant en caisse, 63 % attendent moins de 10 minutes.

On choisit un client du magasin au hasard et on définit les événements suivants :

$B$  : « le client paye à une borne automatique » ;

$\overline{B}$  : « le client paye à une caisse avec opérateur » ;

$S$  : « la durée d'attente du client lors du paiement est inférieure à 10 minutes ».

Une attente supérieure à dix minutes à une caisse avec opérateur ou à une borne automatique engendre chez le client une perception négative du magasin. Le gérant souhaite que plus de 75 % des clients attendent moins de 10 minutes.

Quelle est la proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique de paiement pour que cet objectif soit atteint ?

#### **Partie D - Bons d'achat**

Lors du paiement, des cartes à gratter, gagnantes ou perdantes, sont distribuées aux clients. Le nombre de cartes distribuées dépend du montant des achats. Chaque client a droit à une carte à gratter par tranche de 10€ d'achats.

Par exemple, si le montant des achats est 58,64€, alors le client obtient 5 cartes ; si le montant est 124,31€, le client obtient 12 cartes.

Les cartes gagnantes représentent 0,5 % de l'ensemble du stock de cartes. De plus, ce stock est suffisamment grand pour assimiler la distribution d'une carte à un tirage avec remise.

1. Un client effectue des achats pour un montant de 158,02€.  
Quelle est la probabilité, arrondie à  $10^{-2}$ , qu'il obtienne au moins une carte gagnante ?
2. À partir de quel montant d'achats, arrondi à 10€, la probabilité d'obtenir au moins une carte gagnante est-elle supérieure à 50 % ?

## EXERCICE 2 (4 points)

### Commun à tous les candidats

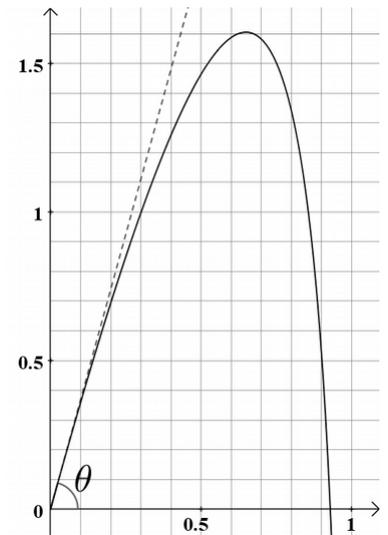
Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir  $\theta$  par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.

Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.

On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 1[$  par :

$$f(x) = bx + 2\ln(1 - x)$$

où  $b$  est un paramètre réel supérieur ou égal à 2,  $x$  est l'abscisse du projectile,  $f(x)$  son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.



1. La fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[0 ; 1[$ . On note  $f'$  sa fonction dérivée.

On admet que la fonction  $f$  possède un maximum sur l'intervalle  $[0 ; 1[$  et que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 1[$  :

$$f'(x) = \frac{-bx + b - 2}{1 - x}.$$

Montrer que le maximum de la fonction  $f$  est égal à  $b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$ .

2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre  $b$  la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.
3. Dans cette question, on choisit  $b = 5,69$ .

L'angle de tir  $\theta$  correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction  $f$  au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus.

Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle  $\theta$ .

### EXERCICE 3 (5 points)

#### Commun à tous les candidats

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé dont l'origine est le point  $A$ .

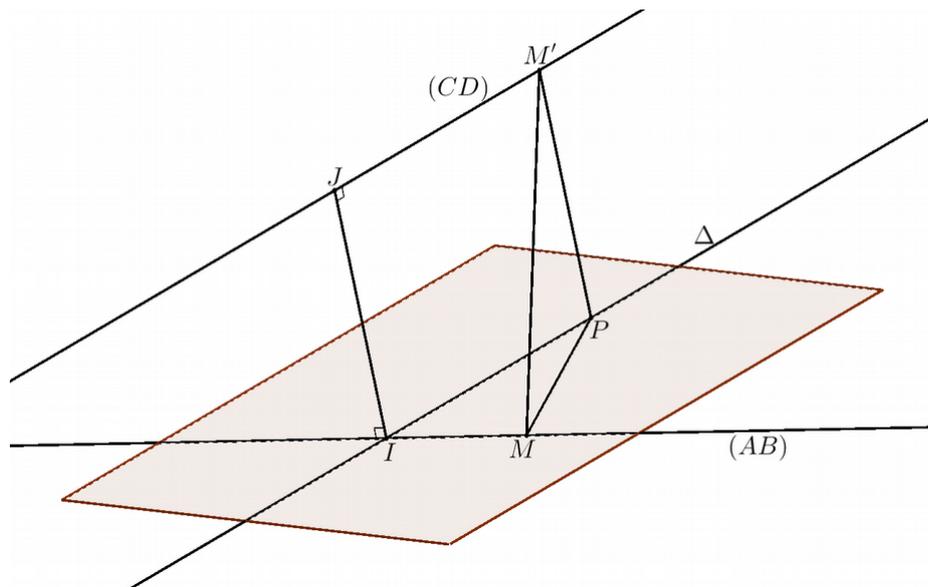
On considère les points  $B(10; -8; 2)$ ,  $C(-1; -8; 5)$  et  $D(14; 4; 8)$ .

- 1.a) Déterminer un système d'équations paramétriques de chacune des droites  $(AB)$  et  $(CD)$ .
- b) Vérifier que les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  ne sont pas coplanaires.
2. On considère le point  $I$  de la droite  $(AB)$  d'abscisse 5 et le point  $J$  de la droite  $(CD)$  d'abscisse 4.
  - a) Déterminer les coordonnées des points  $I$  et  $J$  et en déduire la distance  $IJ$ .
  - b) Démontrer que la droite  $(IJ)$  est perpendiculaire aux droites  $(AB)$  et  $(CD)$ .  
La droite  $(IJ)$  est appelée perpendiculaire commune aux droites  $(AB)$  et  $(CD)$ .
3. Cette question a pour but de vérifier que la distance  $IJ$  est la distance minimale entre les droites  $(AB)$  et  $(CD)$ .

Sur le schéma ci-dessous on a représenté les droites  $(AB)$  et  $(CD)$ , les points  $I$  et  $J$ , et la droite  $\Delta$  parallèle à la droite  $(CD)$  passant par  $I$ .

On considère un point  $M$  de la droite  $(AB)$  distinct du point  $I$ .

On considère un point  $M'$  de la droite  $(CD)$  distinct du point  $J$ .



- a) Justifier que la parallèle à la droite  $(IJ)$  passant par le point  $M'$  coupe la droite  $\Delta$  en un point que l'on notera  $P$ .
- b) Démontrer que le triangle  $MPM'$  est rectangle en  $P$ .
- c) Justifier que  $MM' > IJ$  et conclure.

## EXERCICE 4 (5 points)

### Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

*Les deux graphiques donnés en annexe seront à compléter et à rendre avec la copie.*

Un scooter radiocommandé se déplace en ligne droite à la vitesse constante de  $1 \text{ m.s}^{-1}$ . Il est poursuivi par un chien qui se déplace à la même vitesse. On représente la situation vue de dessus dans un repère orthonormé du plan d'unité 1 mètre. L'origine de ce repère est la position initiale du chien. Le scooter est représenté par un point appartenant à la droite d'équation  $x = 5$ . Il se déplace sur cette droite dans le sens des ordonnées croissantes.

Dans la suite de l'exercice, on étudie deux modélisations différentes de la trajectoire du chien.

#### Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

La situation est représentée par le graphique n°1 donné en **annexe**.

À l'instant initial, le scooter est représenté par le point  $S_0$ . Le chien qui le poursuit est représenté par le point  $M_0$ . On considère qu'à chaque seconde, le chien s'oriente instantanément en direction du scooter et se déplace en ligne droite sur une distance de 1 mètre.

Ainsi, à l'instant initial, le chien s'oriente en direction du point  $S_0$ , et une seconde plus tard il se trouve un mètre plus loin au point  $M_1$ . À cet instant, le scooter est au point  $S_1$ . Le chien s'oriente en direction de  $S_1$  et se déplace en ligne droite en parcourant 1 mètre, et ainsi de suite.

On modélise alors les trajectoires du chien et du scooter par deux suites de points notées  $(M_n)$  et  $(S_n)$ .

Au bout de  $n$  secondes, les coordonnées du point  $S_n$  sont  $(5 ; n)$ . On note  $(x_n ; y_n)$  les coordonnées du point  $M_n$ .

1. Construire sur le graphique n°1 donné en **annexe** les points  $M_2$  et  $M_3$ .
2. On note  $d_n$  la distance entre le chien et le scooter  $n$  secondes après le début de la poursuite. On a donc  $d_n = M_n S_n$ .  
Calculer  $d_0$  et  $d_1$ .
3. Justifier que le point  $M_2$  a pour coordonnées  $\left(1 + \frac{4}{\sqrt{17}} ; \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$ .
4. On admet que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{5 - x_n}{d_n} \\ y_{n+1} = y_n + \frac{n - y_n}{d_n} \end{cases}$$

- a) Le tableau ci-dessous, obtenu à l'aide d'un tableur, donne les coordonnées des points  $M_n$  et  $S_n$  ainsi que la distance  $d_n$  en fonction de  $n$ . Quelles formules doit-on écrire dans les cellules C5 et F5 et recopier vers le bas pour remplir les colonnes C et F ?

	A	B	C	D	E	F
1	$n$	$M_n$		$S_n$		$d_n$
2		$x_n$	$y_n$	5	$n$	
3	0	0	0	5	0	5
4	1	1	0	5	1	4,12310563
5	2	1,9701425	0,24253563	5	2	3,50267291
6	3	2,83515547	0,74428512	5	3	3,12646789
7	4	3,52758047	1,46577498	5	4	2,93092404
...	...	...	...	...	...	...
28	24	4,99979751	21,2268342	5	24	2,7731658
29	25	4,99987053	22,2268342	5	25	2,7731658

b) On admet que la suite  $(d_n)$  est strictement décroissante.

Justifier que cette suite est convergente et conjecturer sa limite à l'aide du tableau.

### Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

On modélise maintenant la trajectoire du chien à l'aide de la courbe  $\mathcal{T}$  de la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 5[$  par :

$$f(x) = -2,5 \ln(1 - 0,2x) - 0,5x + 0,05x^2.$$

Cela signifie que le chien se déplace sur la courbe  $\mathcal{T}$  de la fonction  $f$ .

1. Lorsque le chien se trouve au point  $M$  de coordonnées  $(x ; f(x))$  de la courbe  $\mathcal{T}$ , où  $x$  appartient à l'intervalle  $[0 ; 5[$ , le scooter se trouve au point  $S$ , d'ordonnée notée  $y_S$ . Ainsi le point  $S$  a pour coordonnées  $(5 ; y_S)$ . La tangente à la courbe  $\mathcal{T}$  au point  $M$  passe par le point  $S$ . Cela traduit le fait que le chien s'oriente toujours en direction du scooter. On note  $d(x)$  la distance  $MS$  entre le chien et le scooter lorsque  $M$  a pour abscisse  $x$ .

a) Sur le graphique n°2 donné en **annexe**, construire, sans calcul, le point  $S$  donnant la position du scooter lorsque le chien se trouve au point d'abscisse 3 de la courbe  $\mathcal{T}$  et lire les coordonnées du point  $S$ .

b) On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; 5[$  et on admet que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 5[$  :

$$f'(x) = \frac{x(1 - 0,1x)}{5 - x}.$$

Déterminer par le calcul une valeur approchée au centième de l'ordonnée du point  $S$  lorsque le chien se trouve au point d'abscisse 3 de la courbe  $\mathcal{T}$ .

2. On admet que  $d(x) = 0,1x^2 - x + 5$  pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 5[$ .

Justifier qu'au cours du temps la distance  $MS$  se rapproche d'une valeur limite que l'on déterminera.

# Annexe

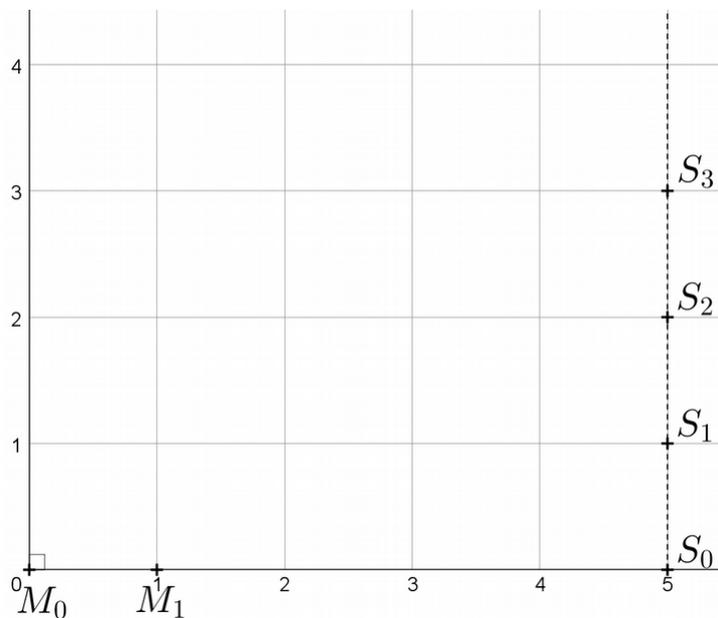
À rendre avec la copie

## EXERCICE 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A, question 1

Graphique n°1



Partie B, question 1

Graphique n°2

