Corrigé

Exercice 1

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2018

ÉPREUVE DU MARDI 29 MAI 2018

MATHÉMATIQUES

– Série S –

Enseignement Obligatoire Coefficient : 7

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1 à 8.

EXERCICE 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

On étudie certaines caractéristiques d'un supermarché d'une petite ville.

Partie A - Démonstration préliminaire

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,2.
On rappelle que l'espérance de la variable aléatoire X, notée $\text{E}(X)$, est égale à :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x 0,2t\,\text{e}^{-0,2t}\,\text{d}t.$$

Le but de cette partie est de démontrer que $\text{E}(X) = 5$.

1. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = 0,2t\,\text{e}^{-0,2t}$.
   On définit la fonction G sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $G(t) = (-t-5)\,\text{e}^{-0,2t}$.
   Vérifier que G est une primitive de g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. En déduire que la valeur exacte de $\text{E}(X)$ est 5.
   Indication : on pourra utiliser, sans le démontrer, le résultat suivant :

$$\lim_{x \to +\infty} x\,\text{e}^{-0,2x} = 0.$$

Partie B - Étude de la durée de présence d'un client dans le supermarché

Une étude commandée par le gérant du supermarché permet de modéliser la durée, exprimée en minutes, passée dans le supermarché par un client choisi au hasard par une variable aléatoire T.
Cette variable T suit une loi normale d'espérance 40 minutes et d'écart type un réel positif noté σ.
Grâce à cette étude, on estime que $\text{P}(T < 10) = 0,067$.

1. Déterminer une valeur arrondie du réel σ à la seconde près.
2. Dans cette question, on prend $\sigma = 20$ minutes. Quelle est alors la proportion de clients qui passent plus d'une heure dans le supermarché ?

Partie C - Durée d'attente pour le paiement

Ce supermarché laisse le choix au client d'utiliser seul des bornes automatiques de paiement ou bien de passer par une caisse gérée par un opérateur.

1. La durée d'attente à une borne automatique, exprimée en minutes, est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,2 min^{-1}.
   a) Donner la durée moyenne d'attente d'un client à une borne automatique de paiement.
   b) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, que la durée d'attente d'un client à une borne automatique de paiement soit supérieure à 10 minutes.
2. L'étude commandée par le gérant conduit à la modélisation suivante :
   - parmi les clients ayant choisi de passer à une borne automatique, 86 % attendent moins de 10 minutes ;
   - parmi les clients passant en caisse, 63 % attendent moins de 10 minutes.

On choisit un client du magasin au hasard et on définit les événements suivants :
B : « le client paye à une borne automatique » ;
$\overline{B}$: « le client paye à une caisse avec opérateur » ;
S : « la durée d'attente du client lors du paiement est inférieure à 10 minutes ».
Une attente supérieure à dix minutes à une caisse avec opérateur ou à une borne automatique engendre chez le client une perception négative du magasin. Le gérant souhaite que plus de 75 % des clients attendent moins de 10 minutes.

Quelle est la proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique de paiement pour que cet objectif soit atteint ?

Partie D - Bons d'achat

Lors du paiement, des cartes à gratter, gagnantes ou perdantes, sont distribuées aux clients. Le nombre de cartes distribuées dépend du montant des achats. Chaque client a droit à une carte à gratter par tranche de 10€ d'achats.
Par exemple, si le montant des achats est 58,64€, alors le client obtient 5 cartes ; si le montant est 124,31€, le client obtient 12 cartes.
Les cartes gagnantes représentent $0,5$ % de l'ensemble du stock de cartes. De plus, ce stock est suffisamment grand pour assimiler la distribution d'une carte à un tirage avec remise.

1. Un client effectue des achats pour un montant de 158,02€.
   Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'il obtienne au moins une carte gagnante ?
2. À partir de quel montant d'achats, arrondi à 10€, la probabilité d'obtenir au moins une carte gagnante est-elle supérieure à 50 % ?

EXERCICE 1

[Amérique du Nord 2018]

Partie A: Démonstration préliminaire

1. Vérifions que G est une primitive de g sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$:

G est une primitive de g sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$ ssi:

pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$, $G'(t) = g(t)$.

Or ici: $G(t) = (-t-5)\,e^{-0,2t}$, pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$.

Dans ces conditions, pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$:

$G'(t) = (-1) \times e^{-0,2t} + (-t-5) \times (-0,2) \times e^{-0,2t}$ **$(u' \times v + u \times v')$**

$= -e^{-0,2t} + 0,2t\,e^{-0,2t} + e^{-0,2t}$

$= 0,2t\,e^{-0,2t}$

$= g(t)$.

Au total: pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$, G est bien une primitive de g.

2. Déduisons-en que la valeur exacte de E (X) est 5:

D'après l'énoncé: $E(X) = \lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^x 0,2t\,e^{-0,2t}\,dt$.

D'où: $E(X) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\,(-t-5)\,e^{-0,2t}\,\right]_0^x$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left((-x - 5)\, e^{-0,2x} + 5 \right)$$

$$= \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{e^{0,2x}} \right) + \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{-5}{e^{0,2x}} \right) + 5.$$

Or: • $\lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{e^{0,2x}} = 0,$

• $\lim_{x \to +\infty} \frac{-5}{e^{0,2x}} = 0,$ d'après TCC.

Par conséquent: $E(X) = 5.$

Au total, nous avons bien: $E(X) = 5.$

Partie B: La durée de présence dans le supermarché

1. Déterminons une valeur arrondie du réel σ à la seconde près:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- T suit la loi normale d'espérance $\mu = 40$ mn et d'écart type $\sigma = ?$
- T' suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de déterminer σ sachant que: $P(T < 10) = 0,067.$

$$P(T < 10) = 0,067 \iff P\left(\frac{T - \mu}{\sigma} < \frac{10 - 40}{\sigma} \right) = 0,067$$

$$\iff P\left(T' < -\frac{30}{\sigma} \right) = 0,067$$

$$\iff P\left(T' < \frac{30}{\sigma} \right) = 0,933.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{30}{\sigma} \approx 1,5, \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \Rightarrow \sigma \approx 20 \text{ mn, à la seconde près.}$$

Au total, une valeur arrondie du réel σ à la seconde près est: $\sigma = 20$ mn.

2. Déterminons la proportion de clients qui passent plus d'une heure dans le supermarché:

Il s'agit de calculer: $P(T \geqslant 60)$, 1 heure = 60 minutes.

$$P(T \geqslant 60) = P\left(\frac{T - \mu}{20} \geqslant \frac{60 - 40}{20}\right)$$

$$= P(T' \geqslant 1)$$

$$= 1 - P(T' \leqslant 1).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$P(T \geqslant 60) \approx 15,9\%$, à 10^{-3} près.

Au total, la proportion de clients qui passent plus d'une heure dans le supermarché est d'environ: 15,9%.

Partie C: Durée d'attente pour le paiement

1. a. Donnons la durée moyenne d'attente d'un client à une borne automatique de paiement:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X suit une loi exponentielle de paramètre: $\lambda = 0,2$.

Dans ces conditions:

- $f(x) = 0,2\, e^{-0,2x}$, pour tout $x \in [\, 0 ; +\infty \,[$.
- $P(X \leqslant a) = \int_0^a f(x)\, dx$.
- $E(X) = \frac{1}{0,2} = 5$ mn.

La durée moyenne d'attente d'un client à une borne automatique de paiement correspond à $E(X)$.

Or: $E(X) = 5$ mn.

Donc la durée moyenne d'attente d'un client à une borne automatique de paiement est de: 5 mn.

1. b. Calculons $P(X \geqslant 10 \text{ mn})$:

$$P(X \geqslant 10) = 1 - P(X \leqslant 10)$$

$$= 1 - \left[\int_0^{10} f(x)\, dx \right]$$

$$= 1 - \left[\int_0^{10} 0,2\, e^{-0,2x}\, dx \right]$$

$$= 1 - [\, -e^{-0,2x} \,]_0^{10}$$

$$= 1 - (-e^{-2} + 1)$$

$$= e^{-2}$$

$$\approx 13,5\%, \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

Au total: il y a environ 13,5% de chance pour que la durée d'attente d'un client à une borne automatique de paiement soit supérieure à 10 minutes.

2. Déterminons la proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique de paiement pour atteindre l'objectif:

D'après l'énoncé, nous avons:

- B = " le client paye à une borne automatique ".
- $\overline{B}$ = " le client paye à une caisse avec opérateur ".
- S = " la durée d'attente du client lors du paiement est inférieure à 10 minutes ".

- $P_B(S) = 86\%$
- $P_B(\overline{S}) = 1 - 86\% = 14\%$.

- $P_{\overline{B}}(S) = 63\%$
- $P_{\overline{B}}(\overline{S}) = 1 - 63\% = 37\%$.

L'objectif: **avoir 75% des clients qui attendent moins de 10 minutes.**

Soient:
- $\mathbf{p} = P(B)$,
- $1 - \mathbf{p} = P(\overline{B})$.

Nous devons déterminer " $\mathbf{p}$ " tel que: $P(S) \geqslant 75\%$.

Calculons: $P(S)$.

L'événement $S = (S \cap B) \cup (S \cap \overline{B})$.

D'où: $P(S) = P(S \cap B) + P(S \cap \overline{B})$

$= P_B(S) \times P(B) + P_{\overline{B}}(S) \times P(\overline{B})$

$= 86\% \times \mathbf{p} + 63\% \times (1 - \mathbf{p})$

$= 63\% + 23\% \times \mathbf{p}$.

Ainsi: $P(S) \geq 75\%$ <=> $63\% + 23\% \times \mathbf{p} \geq 75\%$

<=> $23 \times \mathbf{p} \geq 12$

=> $\mathbf{p} \geq 52,2\%$.

En résumé: si plus de 52, 2% des clients choisissent une borne automatique de paiement, l'objectif du gérant de CARREFOUR sera atteint.

Partie D: Bons d'achat

1. Déterminons la probabilité, arrondie à 10^{-2}, pour que le client obtienne au moins une carte gagnante:

Soit l'expérience aléatoire consistant à distribuer au hasard 15 cartes au client: la distribution d'une carte est assimilable à un tirage avec remise.

Soient les événements G = " la carte est gagnante ", et $\overline{G}$ = " la carte n'est pas gagnante ".

On désigne par Y la variable aléatoire égale au nombre de cartes gagnantes sur les 15 cartes distribuées.

Nous sommes en présence de 15 épreuves aléatoires identiques et indépendantes.

La variable aléatoire discrète Y représentant le nombre de réalisations de G suit donc une loi binômiale de paramètres: $n = 15$ et $p = 0,5\%$.

Et nous pouvons noter: $Y \rightsquigarrow B(15 ; 0,5\%)$.

En fait, on répète 15 fois un schéma de Bernoulli.

Ici, il s'agit de calculer: $P(Y \geq 1)$ avec: $Y \rightsquigarrow B(15 ; 0,5\%)$.

Or: $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0)$

$$= 1 - \binom{15}{0} (0,5\%)^0 (99,5\%)^{15}$$

$\Rightarrow$ $P(Y \geqslant 1) \approx 0,07$, arrondi à 10^{-2}.

(à l'aide d'une machine à calculer)

Au total, la probabilité que le client obtienne au moins une carte gagnante est d'environ: 7%.

2. Déterminons à partir de quel montant d'achats, la probabilité d'obtenir au moins une carte gagnante est supérieure à 50%:

Cela revient à déterminer " **n** " tel que:

$$\mathbf{P(Y \geqslant 1) \geqslant 50\%} \quad \textbf{avec:} \quad \mathbf{Y \leadsto B(n;\, 0,5\%)}.$$

$$P(Y \geqslant 1) \geqslant 50\% \iff 1 - P(Y = 0) \geqslant 50\%$$

$$\iff 1 - \binom{n}{0} (0,5\%)^0 (99,5\%)^n \geqslant 50\%$$

$$\iff (99,5\%)^n \leqslant 50\%, \text{ car: } \binom{n}{0} = 1$$

$$\iff n \times \ln(99,5\%) \leqslant \ln(50\%)$$

$$\Rightarrow n \geqslant \frac{\ln(50\%)}{\ln(99,5\%)}, \text{ car: } 99,5\% \in]0;1[,$$

$$\Rightarrow n \geqslant 139, \text{ car: } \textbf{n est un entier naturel}.$$

Au total: c'est à partir de 139×10 € $= 1390$ € d'achats, que la probabilité d'obtenir au moins une carte gagnante sera supérieure à 50%.