Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. **Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.** Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Exercice 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Une association gère des activités pour des enfants. Elle propose deux programmes d'activités, le programme A : cirque - éveil musical, et le programme B : théâtre - arts plastiques.
À sa création en 2014, l'association compte 150 enfants qui suivent tous le programme A.
Pour chacune des années suivantes, le nombre d'enfants inscrits dans l'association reste égal à 150.
On dispose également des informations suivantes :
Chaque enfant ne peut suivre qu'un seul programme : soit le programme A, soit le programme B.
D'une année à l'autre, 20 % des inscrits au programme A choisissent à nouveau le programme A, alors que 40 % choisissent le programme B. Les autres quittent l'association.
D'une année à l'autre, 60 % des inscrits au programme B choisissent à nouveau le programme B et les autres quittent l'association.
Les nouveaux inscrits, qui compensent les départs, suivent obligatoirement le programme A.

On modélise le nombre d'inscrits au programme A et le nombre d'inscrits au programme B durant l'année 2014+n respectivement par deux suites (a_n) et (b_n) et on note U_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$. On a donc $U_0 = \begin{pmatrix} 150 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $U_{n+1} = U_n M$ où $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0,2^n & 75 - 75 \times 0,2^n \end{pmatrix}$.
3. En déduire la répartition des effectifs à long terme entre les deux programmes.

Partie B

L'association affecte à chaque enfant un numéro à 6 chiffres $c_1c_2c_3c_4c_5k$. Les deux premiers chiffres représentent l'année de naissance de l'enfant, les trois suivants sont attribués à l'enfant au moment de sa première inscription. Le dernier chiffre, appelé clé de contrôle, est calculé automatiquement de la façon suivante :

- on effectue la somme $S = c_1 + c_3 + c_5 + a \times (c_2 + c_4)$ où a est un entier compris entre 1 et 9 ;
- on effectue la division euclidienne de S par 10, le reste obtenu est la clé k.

Lorsqu'un employé saisit le numéro à 6 chiffres d'un enfant, on peut détecter une erreur de saisie lorsque le sixième chiffre n'est pas égal à la clé de contrôle calculée à partir des cinq premiers chiffres.

1. Dans cette question seulement, on choisit $a = 3$.
   a) Le numéro 111383 peut-il être celui d'un enfant inscrit à l'association ?
   b) L'employé, confondant un frère et une sœur, échange leurs années de naissance : 2008 et 2011. Ainsi, le numéro $08c_3c_4c_5k$ est transformé en $11c_3c_4c_5k$. Cette erreur est-elle détectée grâce à la clé ?
2. On note $c_1c_2c_3c_4c_5k$ le numéro d'un enfant. On cherche les valeurs de l'entier a pour lesquelles la clé détecte systématiquement la faute de frappe lorsque les chiffres c_3 et c_4 sont intervertis. On suppose donc que les chiffres c_3 et c_4 sont distincts.

a) Montrer que la clé ne détecte pas l'erreur d'interversion des chiffres c_3 et c_4 si et seulement si $(a-1)(c_4-c_3)$ est congru à 0 modulo 10.

b) Déterminer les entiers n compris entre 0 et 9 pour lesquels il existe un entier p compris entre 1 et 9 tel que $np \equiv 0\ (10)$.

c) En déduire les valeurs de l'entier a qui permettent, grâce à la clé, de détecter systématiquement l'interversion des chiffres c_3 et c_4.

EXERCICE 4

[Amérique du Nord 2017]

Partie A:

1. Montrons que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n \times M$:

Soient les programmes: • A: " cirque-éveil musical ",

• B: " théâtre-arts plastiques ".

Le nombre d'inscrits au programme A durant l'année 2014 + " n+1 " est:

$$a_{n+1} = 0,2 \times a_n + 0,4 \times b_n + 0,4 \times a_n.$$

$0,2 \times a_n$ = 20% des inscrits à A, choisissent à nouveau A, l'année suivante

$0,4 \times b_n$ = 40% des inscrits à A, choisissent le programme B, l'année suivante

$0,4 \times a_n$ = les nouveaux inscrits, qui compensent les départs (40%), suivent obligatoirement le programme A.

De même: $b_{n+1} = 0,4 \times a_n + 0,6 \times b_n$.

Au total: $\begin{cases} a_{n+1} = 0,6 \times a_n + 0,4 \times b_n \\ b_{n+1} = 0,4 \times a_n + 0,6 \times b_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

$\iff U_{n+1} = U_n \times M.$

2. **Montrons que, pour tout entier naturel n, $U_n = (75 + 75 \times 0,2^n \quad 75 - 75 \times 0,2^n)$:**

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n = (75 + 75 \times 0,2^n \quad 75 - 75 \times 0,2^n)$ ".

Initialisation: • $U_0 = (75 + 75 \times 0,2^0 \quad 75 - 75 \times 0,2^0)$?

oui car: $(75 + 75 \times 0,2^0 \quad 75 - 75 \times 0,2^0) = (150 \quad 0)$,

et: $U_0 = (150 \quad 0)$, d'après l'énoncé.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n = (75 + 75 \times 0,2^n \quad 75 - 75 \times 0,2^n)$
et montrons qu'alors $U_{n+1} = (75 + 75 \times (0,2)^{n+1} \quad 75 - 75 \times (0,2)^{n+1})$.

Supposons: $U_n = (75 + 75 \times 0,2^n \quad 75 - 75 \times 0,2^n)$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} a_n = 75 + 75 \times 0,2^n \\ b_n = 75 - 75 \times 0,2^n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0,6a_n + 0,4b_n = \dots \\ 0,4a_n + 0,6b_n = \dots \end{cases} \text{(on remplace)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = 75 + 75 \times (0,2)^{n+1} \\ b_{n+1} = 75 - 75 \times (0,2)^{n+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = (75 + 75 \times (0,2)^{n+1} \quad 75 - 75 \times (0,2)^{n+1}).$$

Conclusion: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = (75 + 75 \times 0,2^n \quad 75 - 75 \times 0,2^n)$.

3. **Déduisons-en la répartition des effectifs à long terme entre les deux programmes:**

Pour répondre à cette question, nous allons calculer les limites en $+\infty$ de " a_n " et de " b_n ".

- $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 75 + 75 \times 0,2^n$

  $= 75$ car: $0,2 \in]0;1[$.

- $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 75 - 75 \times 0,2^n$

  $= 75$ car: $0,2 \in]0;1[$.

Ainsi, à long terme: 50% des effectifs suivra le programme A et 50% des effectifs suivra le programme B. Les effectifs seront donc équirépartis entre les deux programmes: ils s'équilibreront entre les deux programmes.

Partie B:

1. a. **Le numéro 111383 peut-il être celui d'un enfant inscrit à l'association ?**

Cet enfant est inscrit à l'association ssi: $k = 3$.

Or: • $S = 1 + 1 + 8 + 3 \times (1 + 3) = 22$,

• en divisant 22 par 10, le reste obtenu est $k = 2$.

Ainsi, comme: $k = 2$ et $2 \neq 3$, le numéro 111383 ne peut pas être celui d'un enfant inscrit à l'association.

1. b. L'erreur sera-t-elle détectée ?

Pour répondre à cette question, nous allons calculer S_1 (associée à $08C_3C_4C_5k$) et S_2 (associée à $11C_3C_4C_5k$).

- $S_1 = 0 + C_3 + C_5 + 3\,(8 + C_4)$ => $S_1 = C_3 + C_5 + 3\,C_4 + 24$.
- $S_2 = 1 + C_3 + C_5 + 3\,(1 + C_4)$ => $S_2 = C_3 + C_5 + 3\,C_4 + 4$.

Or: $S_1 = S_2 + 2 \times 10$ <=> $S_1 \equiv S_2\,[\,10\,]$.

Donc S_1 et S_2 sont congrus l'un à l'autre modulo " 10 ".

Ainsi: la clé " k " est la même pour S_1 et S_2 et par conséquent l'erreur ne sera pas détectée.

2. a. Montrons le:

- Quand on a " $C_1C_2C_3C_4C_5k$ ": $S_1 = C_1 + C_3 + C_5 + a \times (C_2 + C_4)$.
- Quand on a " $C_1C_2C_4C_3C_5k$ ": $S_2 = C_1 + C_4 + C_5 + a \times (C_2 + C_3)$.

Dans ces conditions, la clé ne détectera pas l'erreur d'interversion des chiffres C_3 et C_4 ssi:

$$S_1 \equiv S_2\,[\,10\,] \iff C_3 + a \times (C_2 + C_4) \equiv C_4 + a \times (C_2 + C_3)\,[\,10\,]$$

$$\iff C_3 + a \times C_4 \equiv C_4 + a \times C_3\,[\,10\,]$$

$$\iff (C_3 - C_4) + a \times (C_4 - C_3) \equiv 0\,[\,10\,]$$

$$\Rightarrow (a - 1)\,(C_4 - C_3) \equiv 0\,[\,10\,].$$

Au total: la clé ne détecte pas l'erreur d'interversion ssi:

$(a - 1)\,(C_4 - C_3)$ est congru à 0 modulo " 10 ".

2. b. Déterminons les entiers " n " demandés:

Pour répondre à cette question, nous allons dresser un tableau qui donne les restes de la division de $n \cdot p$ par 10.

Pour tout entier naturel $n \in [\,0\,;\,9\,]$ et tout entier naturel $p \in [\,1\,;\,9\,]$, nous avons:

p \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Au total les entiers n demandés compris entre 0 et 9 sont:

$$n = 0,\ n = 2,\ n = 4,\ n = 5,\ n = 6 \ \text{ et } \ n = 8.$$

2. c. Déduisons-en les valeurs de l'entier " a " qui permettent, grâce à la clé, de détecter systématiquement l'interversion des chiffres C_3 et C_4:

Nous savons que la clé ne détecte pas l'erreur d'interversion ssi:

$$(a - 1) \cdot (C_4 - C_3) \equiv 0\ [\,10\,].$$

Or: $\;n \cdot p \equiv 0\ [\,10\,]$ quand $n = 0, 2, 4, 5, 6, 8$.

$n \in \{\,0\,;2\,;\,4\,;5\,;6\,;8\,\} \iff (a - 1) \in \{\,0\,;2\,;\,4\,;5\,;6\,;8\,\}$

$\iff a \in \{\,1\,;3\,;5\,;6\,;7\,;9\,\}.$

Donc la clé ne détecte pas l'erreur quand: $a \in \{ 1 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 9 \}$.

Ainsi, la clé détecte systématiquement l'erreur quand: $a \in \{ 2 ; 4 ; 8 \}$.

Au total, les valeurs de l'entier " a " qui permettent grâce à la clé, de détecter systématiquement l'interversion des chiffres C_3 et C_4 sont:

$$a = 2, a = 4 \text{ et } a = 8.$$