Corrigé

Exercice 3

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel $n > 0$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs. On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n). Elle vérifie donc trois propriétés :

* $u_0 > 1$,
* pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 0$.
* pour tout $n > 0$, $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.

1. On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2.

2. Pour tout entier $n > 0$, on note $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$. On a en particulier $s_1 = u_0$.

a) Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$.

b) En déduire que pour tout entier $n > 0$,

$$u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}.$$

c) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > 1$.

3. À l'aide de l'algorithme ci-contre, on veut calculer le terme u_n pour une valeur de n donnée.

a) Recopier et compléter la partie traitement de l'algorithme ci-contre.

Entrée :	Saisir n
	Saisir u
Traitement :	s prend la valeur u
	Pour i allant de 1 à n :
	| u prend la valeur ...
	| s prend la valeur ...
	Fin Pour
Sortie :	Afficher u

b) Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de u_n pour différentes valeurs de l'entier n :

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

4.a) Justifier que pour tout entier $n > 0$, $s_n > n$.

b) En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n).

EXERCICE 3

[Amérique du Nord 2017]

1. Déterminons U_1 et U_2:

- Il s'agit de calculer U_1.

U_1 est tel que: $U_0 + U_1 = U_0 \times U_1 \iff 3 + U_1 = 3 \times U_1$

$\iff 3 \times U_1 - U_1 = 3$

$\iff 2\,U_1 = 3$

$\Rightarrow U_1 = \frac{3}{2}$.

- Il s'agit de calculer U_2.

U_2 est tel que: $U_0 + U_1 + U_2 = U_0 \times U_1 \times U_2 \iff 3 + \frac{3}{2} + U_2 = 3 \times \frac{3}{2} \times U_2$

$\iff \frac{9}{2} + U_2 = \frac{9}{2} \times U_2$

$\iff \frac{9}{2} U_2 - U_2 = \frac{9}{2}$

$\Rightarrow U_2 = \frac{9}{7}$.

Au total: $U_1 = \frac{3}{2}$ et $U_2 = \frac{9}{7}$.

2. a. Vérifions que, pour tout entier $n > 0$, $S_{n+1} = S_n + U_n$ et $S_n > 1$:

Pour tout entier naturel $n > 0$: • $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1}$

d'où: • $S_{n+1} = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1} + U_n$

$\Rightarrow S_{n+1} = S_n + U_n$.

De plus, comme pour tout $n > 0$: $U_n > 0$, nous avons:

$$U_0 = 3 > 0,\ U_1 > 0,\ U_2 > 0, \dots,\ U_{n-1} > 0.$$

Par conséquent: $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} > 3 \Rightarrow U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} > 1$

$\Rightarrow S_n > 1.$

Au total, nous avons bien pour tout entier naturel $n > 0$: $S_{n+1} = S_n + U_n$ et $S_n > 1.$

2. b. Déduisons-en que pour tout entier naturel $n > 0$, $U_n = \dfrac{S_n}{S_n - 1}$:

Pour tout entier naturel $n > 0$: $S_n + U_n = S_n \times U_n$

$\Leftrightarrow (S_n - 1)\, U_n = S_n$

$\Rightarrow U_n = \dfrac{S_n}{S_n - 1}$, avec: $S_n \neq 1.$

Au total, pour tout entier naturel $n > 0$: $U_n = \dfrac{S_n}{S_n - 1}.$

3. a. Recopions et complétons la partie traitement de l'algorithme:

La partie **Traitement** complétée est la suivante:

Traitement:	**S prend la valeur U**
	Pour i allant de 1 à n:
	$\quad$ **U prend la valeur** $\dfrac{S}{S-1}$
	$\quad$ **S prend la valeur** $S + U$
	Fin Pour

3. b. Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (U_n) ?

La conjecture que nous pouvons émettre sur la convergence de la suite (U_n) est:

" on pourrait, a priori, penser que la suite (U_n) est convergente ".

De plus, (U_n) est positive et semble converger vers " 1 " (minorant).

4. a. Justifions que pour tout entier $n > 0$, $S_n > n$:

Pour tout entier naturel $n > 0$, $U_n > 1$ d'après la question précédente.

Dans ces conditions: $U_0 = 3 > 1,\ U_1 > 1,\ U_2 > 1, \dots,\ U_{n-1} > 1.$

D'où: $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} > 1 + 1 + 1 + \dots + 1$

cad: $S_n > n \times (1) \Rightarrow S_n > n.$

Au total: pour tout entier naturel $n > 0$, $S_n > n$.

4. b. Déduisons-en la limite de la suite (S_n) ainsi que celle de la suite (U_n):

- $$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} n$$
  $$= +\infty.$$

Donc la suite (S_n) est divergente.

- $$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{S_n - 1}$$
  $$= ?$$

Or, en supposant $S_n \neq 0$ et $S_n \neq 1$, nous pouvons écrire:

$$\frac{1}{U_n} = \frac{S_n - 1}{S_n} \iff \frac{1}{U_n} = 1 - \frac{1}{S_n}.$$

D'où : $\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{S_n}$

$= 1$ car : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{S_n} = 0.$

Donc la suite (U_n) est convergente et converge vers " 1 ".