Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

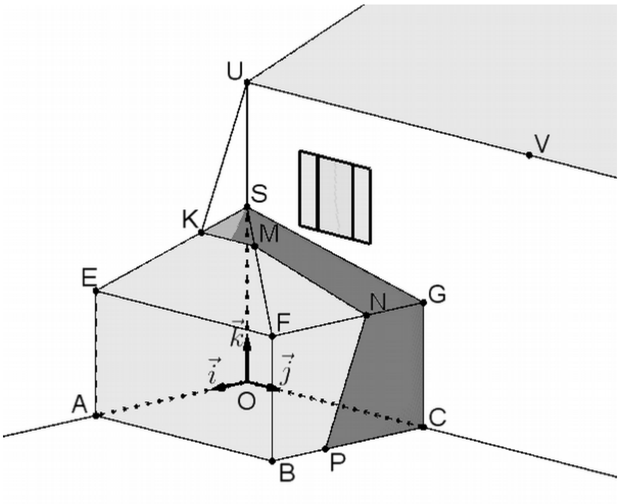
EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un particulier s'intéresse à l'ombre portée sur sa future véranda par le toit de sa maison quand le soleil est au zénith. Cette véranda est schématisée ci-dessous en perspective cavalière dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\right)$. Le toit de la véranda est constitué de deux faces triangulaires SEF et SFG.

- Les plans (SOA) et (SOC) sont perpendiculaires.
- Les plans (SOC) et (EAB) sont parallèles, de même que les plans (SOA) et (GCB).
- Les arêtes $[UV]$ et $[EF]$ des toits sont parallèles.

Le point K appartient au segment $[SE]$, le plan (UVK) sépare la véranda en deux zones, l'une éclairée et l'autre ombragée. Le plan (UVK) coupe la véranda selon la ligne polygonale $KMNP$ qui est la limite ombre-soleil.



1. Sans calcul, justifier que :
   a) le segment $[KM]$ est parallèle au segment $[UV]$;
   b) le segment $[NP]$ est parallèle au segment $[UK]$.
2. Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\right)$. Les coordonnées des différents points sont les suivantes : $A(4\,;0\,;0)$, $B(4\,;5\,;0)$, $C(0\,;5\,;0)$, $E(4\,;0\,;2{,}5)$, $F(4\,;5\,;2{,}5)$, $G(0\,;5\,;2{,}5)$, $S(0\,;0\,;3{,}5)$, $U(0\,;0\,;6)$ et $V(0\,;8\,;6)$.
   On souhaite déterminer de façon exacte la section des faces visibles de la véranda par le plan (UVK) qui sépare les zones ombragée et ensoleillée.
   a) Au moment le plus ensoleillé, le point K a pour abscisse $1{,}2$. Vérifier que les coordonnées du point K sont $(1{,}2\,;0\,;3{,}2)$.
   b) Montrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(7\,;0\,;3)$ est un vecteur normal au plan (UVK) et en déduire une équation cartésienne du plan (UVK).
   c) Déterminer les coordonnées du point N intersection du plan (UVK) avec la droite (FG).
   d) Expliquer comment construire la ligne polygonale sur le schéma de la véranda.
3. Afin de faciliter l'écoulement des eaux de pluie, l'angle du segment $[SG]$ avec l'horizontale doit être supérieur à 7°. Cette condition est-elle remplie ?

EXERCICE 4

[Amérique du Nord 2017]

1. a. Justifions que les segments [KM] et [UV] sont parallèles:

Pour cela nous allons appliquer le théorème du **toit** selon lequel:

" Soient d_1 et d_2 deux droites parallèles contenues respectivement dans les plans P_1 et P_2. Si ces deux plans sont sécants en une droite Δ, alors la droite Δ est parallèle à d_1 et d_2 ".

Ici:
- les droites (UV) et (EF) sont parallèles: $d_1 // d_2$,
- la droite (UV) appartient au plan (UVK): P_1,
- la droite (EF) appartient au plan (EFK): P_2,
- les plans (UVK) et (EFK) se coupent en une droite: $\Delta = (KM)$.

Donc, d'après le théorème du **toit**: (KM) est parallèle à (UV) et (EF), et donc les segments [KM] et [UV] sont parallèles.

1. b. Justifions le segment [NP] est parallèle au segment [UK]:

Les plans (UVK) et (SOA) se coupent en une droite: $(UK) = \Delta_1$.

Les plans (UVK) et (BCG) se coupent en une droite: $(NP) = \Delta_2$.

Comme les plans (SOA) et (BCG) sont verticaux et donc parallèles, nous pouvons alors affirmer que: les droites Δ_1 et Δ_2 sont parallèles.

En conclusion: les segments [NP] et [UK] sont parallèles.

2. a. Déterminons les coordonnées du point K (1, 2 ; y ; z):

Le point K ∈ [SE].

Donc les vecteurs $\overrightarrow{SE}$ et $\overrightarrow{SK}$ sont colinéaires, avec: $\overrightarrow{SE}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SK}\begin{pmatrix} 1,2 \\ y \\ z-3,5 \end{pmatrix}$.

Or, $\overrightarrow{SE}$ et $\overrightarrow{SK}$ sont colinéaires ssi il existe un réel α tel que: $\overrightarrow{SE} = \alpha \cdot \overrightarrow{SK}$.

$$\overrightarrow{SE} = \alpha \cdot \overrightarrow{SK} \iff \begin{cases} 4 = 1,2 \cdot \alpha \\ 0 = y \cdot \alpha \\ -1 = (z-3,5) \cdot \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \dfrac{4}{1,2} \\ y = 0 \\ z \cdot \alpha = -1 + 3,5 \cdot \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{0,3} \\ y = 0 \\ z = 3,2 \end{cases}.$$

Au total, les coordonnées du point K (1, 2 ; y ; z) sont: $x = 1,2$, $y = 0$ et $z = 3,2$.

2. b. b1. Montrons que le vecteur $\vec{n}$ (7 ; 0 ; 3) est un vecteur normal au plan (UVK):

D'après le cours: **un vecteur $\vec{n}$ (a ; b ; c) est normal à un plan ssi ce vecteur est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.**

Ici:
- il s'agit du plan (UVK);
- 2 vecteurs non colinéaires de ce plan sont: $\overrightarrow{UV}\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{UK}\begin{pmatrix} 1,2 \\ 0 \\ -2,8 \end{pmatrix}$;
- $\vec{n}$ (7 ; 0 ; 3).

De plus:
- $\vec{n}$ et $\overrightarrow{UV}$ sont orthogonaux car: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{UV} = 0$;
- $\vec{n}$ et $\overrightarrow{UK}$ sont orthogonaux car: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{UK} = 0$.

Par conséquent: $\vec{n}$ est bien orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan. Donc $\vec{n}\ (7;0;3)$ est un vecteur normal au plan (UVK).

2. b. b2. Déduisons-en une équation cartésienne du plan (UVK):

Ici: • $\vec{n}\ (a=7;\ b=0;\ c=3)$;

• $U\ (0;0;6)$ est un point de l'espace.

D'où, une équation cartésienne du plan passant par $U\ (0;0;6)$ et de vecteur normal $\vec{n}$ est: $a\,(x-x_u)+b\,(y-y_u)+c\,(z-z_u)=0$

$\iff 7\,(x-0)+0\,(y-0)+3\,(z-6)=0$

$\Rightarrow 7x+3z=18.$

En conclusion, une équation cartésienne du plan (UVK) est: $7x+3z=18.$

2. c. Déterminons les coordonnées du point N:

Le point N est le point d'intersection de la droite (FG) et du plan (UVK).

La droite (FG) a pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = 4-4t \\ y = 5 \\ z = 2,5 \end{cases} \quad ,\ t \in \mathbb{R}.$$

Soit $\mathbf{N}\ (x_N;\ y_N;\ z_N)$, un point appartenant à la droite (FG).

N appartient aussi au plan (UVK) ssi ses coordonnées vérifient: $7x+3z=18.$

$7x_N+3z_N=18 \iff 7\,(4-4t)+3\,(2,5)=18 \Rightarrow t=\dfrac{17,5}{28}.$

Dans ces conditions, les coordonnées du point N sont:

$$\begin{cases} x_N = 1,5 \\ y_N = 5 \\ z_N = 2,5 \end{cases}.$$

Au total, la droite (FG) coupe le plan (UVK) au point: N (1,5 ; 5 ; 2,5).

2. d. Expliquons comment construire la ligne polygonale sur le schéma:

La démarche pour construire la ligne polygonale sur le schéma de la véranda est la suivante:

- On place le point K,
- On place le point N,
- On trace la parallèle (Δ_{31}) à la droite (UV) passant par K,
- (Δ_{31}) coupe la droite (SF) au point M.

Ainsi: on peut tracer les segments [KM] et [MN], et la parallèle à la droite (UK) passant par N coupe la droite (BC) en P. D'où le segment [NP].

3. L'angle du segment [SG] avec l'horizontale est-il supérieur à 7° ?

Nous devons calculer l'angle θ entre les vecteurs $\overrightarrow{GS}$ et $\overrightarrow{CO}$.

D'après le cours, nous savons que l'angle θ entre 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est

tel que: $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}$.

Or: • $\overrightarrow{GS}\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$,

• $\overrightarrow{CO}\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D'où: • $\overrightarrow{GS} \cdot \overrightarrow{CO} = (0 \times 0) + (-5 \times (-5)) + (1 \times 0)$ => $\overrightarrow{GS} \cdot \overrightarrow{CO} = 25$,

• $||\overrightarrow{GS}|| = \sqrt{26}$,

• $||\overrightarrow{CO}|| = 5$.

Ainsi: $\cos\theta = \dfrac{25}{5 \cdot \sqrt{26}}$ => $\cos\theta = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$ => $\theta \approx 11°$.

Au total: l'angle $\theta \approx 11°$ du segment [SG] avec l'horizontale est bien supérieur à 7°.