Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

> Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
> Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
> **Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.**
> Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires.
On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à rendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne.
Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du n-ième tirage.

1) a) Traduire par une phrase la probabilité $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)$ puis déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)\,,P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) \text{ et } P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)\,.$$

b) Exprimer $P(X_{n+1}=1)$ en fonction de $P(X_n=0)$, $P(X_n=1)$ et $P(X_n=2)$.

2) Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n la matrice ligne définie par :

$$R_n = \begin{pmatrix} P(X_n=0) & P(X_n=1) & P(X_n=2) \end{pmatrix}$$

et on considère M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note R_0 la matrice ligne $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On admettra par la suite que, pour tout entier naturel n, $R_{n+1} = R_n \times M$.
Déterminer R_1 et justifier que, pour tout entier naturel n, $R_n = R_0 \times M^n$.

3) On admet que $M = P \times D \times P^{-1}$ avec :

$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Établir que, pour tout entier naturel n, $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

On admettra que, pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4) a) Calculer $D^n \times P^{-1}$ en fonction de n.

b) Sachant que $R_0P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, déterminer les coefficients de R_n en fonction de n.

5) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=0)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=1)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=2)$.
Interpréter ces résultats.

EXERCICE 4

[Amérique du Nord 2016]

1. a. a1. Traduction par une phrase de $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)$:

Il s'agit de la probabilité que: l'urne U contienne 1 Boule Blanche (BB) à la fin du (n+1)-ème tirage sachant qu'elle contenait 1 BB à la fin du n-ème tirage.

1. a. a2. Calculons $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)$:

Il s'agit de la probabilité que l'urne U contienne 1 BB à la fin du (n+1)-ème tirage sachant qu'elle contenait 0 BB à la fin du n-ème tirage.

Donc à la fin du n-ème tirage, l'urne V contient 2 BB et par conséquent, au (n+1)-ème tirage, elle en perdra une qui se retrouvera forcément dans l'urne U.

Ainsi: $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)=1$.

1. a. a3. Calculons $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)$:

Il s'agit de la probabilité que l'urne U contienne 1 BB à la fin du (n+1)-ème tirage sachant qu'elle contenait 1 BB à la fin du n-ème tirage.

Donc à la fin du n-ème tirage, les urnes U et V contiennent chacune 1 BB et 1 Boule Noire (BN).

Par conséquent, au (n + 1)-ème tirage, il y a 2 chances sur 4 pour que cette situation reste inchangée.

Ainsi: $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=\frac{2}{4}$ => $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=\frac{1}{2}$.

1. a. a4. Calculons $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)$:

Il s'agit de la probabilité que l'urne U contienne 1 BB à la fin du (n+1)-ème tirage sachant qu'elle contenait 2 BB à la fin du n-ème tirage.

Donc à la fin du n-ème tirage, l'urne V contient 2 BN et par conséquent, au (n+1)-ème tirage, elle en perdra une qui se retrouvera forcément dans l'urne U.

Ainsi: $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)=1$.

1. b. Exprimons $P(X_{n+1}=1)$ en fonction de $P(X_n=0)$, $P(X_n=1)$ et $P(X_n=2)$:

L'événement: $(X_{n+1}=1)=[(X_{n+1}=1)\cap(X_n=0)]\cup[(X_{n+1}=1)\cap(X_n=1)]$
$\cup[(X_{n+1}=1)\cap(X_n=2)]$.

D'où: $P(X_{n+1}=1)=P(X_{n+1}=1)\cap(X_n=0)$
$+P((X_{n+1}=1)\cap(X_n=1))$
$+P((X_{n+1}=1)\cap(X_n=2))$

$=[P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)]\times P(X_n=0)+[P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)]$
$\times P(X_n=1)+[P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)]\times P(X_n=2)$

=> $P(X_{n+1}=1)=1\times P(X_n=0)+\frac{1}{2}\times P(X_n=1)+1\times P(X_n=2)$.

Au total: $P(X_{n+1}=1)=P(X_n=0)+\frac{1}{2}\times P(X_n=1)+P(X_n=2)$.

2. a. Déterminons R_1:

D'après l'énoncé: $R_{n+1}=R_n\times M$.

Dans ces conditions: $R_1 = R_0 \times M$.

D'où: $R_1 = (0 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R_1 = (0 \quad 1 \quad 0)$.

Au total: $R_1 = (0 \quad 1 \quad 0)$.

2. b. Montrons que pour tout entier naturel n, $R_n = R_0 \times M^n$:

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $R_n = R_0 \times M^n$ ".

Initialisation: • $R_0 = R_0 \times M^0 \iff R_0 = R_0$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $R_1 = R_0 \times M^1 \iff R_1 = (0 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow R_1 = (0 \quad 1 \quad 0)$.

Or $R_1 = (0 \quad 1 \quad 0)$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $R_n = R_0 \times M^n$

et montrons qu'alors: $R_{n+1} = R_0 \times M^{n+1}$.

Supposons: $R_n = R_0 \times M^n$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

(1) $\Rightarrow R_n \times M = R_0 \times M^n \times M$

$\Rightarrow R_n \times M = R_0 \times M^{n+1}$

$\Rightarrow \quad R_{n+1} = R_0 \times M^{n+1}.$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, nous avons:

$$R^n = R_0 \times M^n.$$

3. Établissons que pour tout entier naturel n, $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$:

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$ ".

Initialisation: • $M^0 = P \times D^0 \times P^{-1}$?

$$P \times D^0 \times P^{-1} = P \times I_3 \times P^{-1}$$

$$= P \times P^{-1}$$

$$= I_3.$$

Or $M_0 = I_3$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $M^1 = P \times D^1 \times P^{-1}$?

$$P \times D^1 \times P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{-3}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Or } M^1 = M \iff M^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$

et montrons qu'alors: $M^{n+1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}$.

Supposons: $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

$(1) \Rightarrow M^n \times M = P \times D^n \times P^{-1} \times M$

$\Rightarrow M^{n+1} = P \times D^n \times P^{-1} \times P \times D \times P^{-1}$

$\Rightarrow M^{n+1} = P \times D^n \times (P^{-1} \times P) \times D \times P^{-1}$

$\Rightarrow M^{n+1} = P \times D^n \times I_3 \times D \times P^{-1}$

$\Rightarrow M^{n+1} = P \times D^n \times D \times P^{-1}$

$\Rightarrow M^{n+1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, nous avons:

$$M^n = P \times D^n \times P^{-1}.$$

4. a. Calculons $D^n \times P^{-1}$ en fonction de n:

$$D^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} \left(\frac{-1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{-1}{2}\right)^n & -2 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^n & \left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Au total: $\underbrace{D^n \times P^{-1}}_{= A} = \begin{pmatrix} \left(\frac{-1}{2}\right)^n & -2 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^n & \left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$

4. b. Déterminons les coefficients de R_n en fonction de n:

D'après la question **2.**, $R_n = R_0 \times M^n$.

D'où: $R_n = R_0 \times M^n \iff R_n = R_0 \times P \times D^n \times P^{-1}$

$$\iff R_n = (0 \quad 0 \quad 1) \times \begin{pmatrix} \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{-3}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \times A$$

$$\Rightarrow R_n = \left(\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} \quad \frac{-2}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} \right).$$

Au total: les coefficients de R_n sont respectivement

$$a = \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}$$

$$b = \frac{-2}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{2}{3} \quad \text{, avec: } \quad R_n = (a \quad b \quad c).$$

$$c = \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}$$

5. a. Déterminons les limites de a, b et c:

- $\lim\limits_{n \to +\infty} a = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}$

  $= \frac{1}{6}$ car: $\frac{-1}{2} \in]-1\,;0[$.

- $\lim\limits_{n \to +\infty} b = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-2}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$

  $= \frac{2}{3}$ car: $\frac{-1}{2} \in]-1\,;0[$.

- $\lim\limits_{n \to +\infty} c = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}$

  $= \frac{1}{6}$ car: $\frac{-1}{2} \in]-1\,;0[$.

Au total:

- $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 0) = \lim\limits_{n \to +\infty} a$

  $= \frac{1}{6},$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 1) = \lim\limits_{n \to +\infty} b$

  $= \frac{2}{3},$

- $$\lim_{n \to +\infty} P(X_n = 2) = \lim_{n \to +\infty} c$$
$$= \frac{1}{6}.$$

5. b. Interprétation des résultats:

Les résultats indiquent qu'au bout d'un très grand nombre de tirages:

- il y a une chance sur six d'avoir 0 BB dans l'urne U,
- il y a deux chances sur six d'avoir 1 BB dans l'urne U,
- il y a une chance sur six d'avoir 2 BB dans l'urne U.