

EXERCICE 4

[Amérique du Nord 2016]

1. a. a1. Traduction par une phrase de $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)$:

Il s'agit de la probabilité que: l'urne U contienne 1 Boule Blanche (BB) à la fin du $(n+1)$ -ème tirage sachant qu'elle contenait 1 BB à la fin du n -ème tirage.

1. a. a2. Calculons $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)$:

Il s'agit de la probabilité que l'urne U contienne 1 BB à la fin du $(n+1)$ -ème tirage sachant qu'elle contenait 0 BB à la fin du n -ème tirage.

Donc à la fin du n -ème tirage, l'urne V contient 2 BB et par conséquent, au $(n+1)$ -ème tirage, elle en perdra une qui se retrouvera forcément dans l'urne U.

Ainsi: $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1) = 1$.

1. a. a3. Calculons $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)$:

Il s'agit de la probabilité que l'urne U contienne 1 BB à la fin du $(n+1)$ -ème tirage sachant qu'elle contenait 1 BB à la fin du n -ème tirage.

Donc à la fin du n -ème tirage, les urnes U et V contiennent chacune 1 BB et 1 Boule Noire (BN).

Par conséquent, au $(n+1)$ -ème tirage, il y a 2 chances sur 4 pour que cette situation reste inchangée.

$$\text{Ainsi: } P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) = \frac{2}{4} \Rightarrow P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) = \frac{1}{2}.$$

1. a. a4. Calculons $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)$:

Il s'agit de la probabilité que l'urne U contienne 1 BB à la fin du (n+1)-ème tirage sachant qu'elle contenait 2 BB à la fin du n-ème tirage.

Donc à la fin du n-ème tirage, l'urne V contient 2 BN et par conséquent, au (n+1)-ème tirage, elle en perdra une qui se retrouvera forcément dans l'urne U.

$$\text{Ainsi: } P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1) = 1.$$

1. b. Exprimons $P(X_{n+1}=1)$ en fonction de $P(X_n=0)$, $P(X_n=1)$ et $P(X_n=2)$:

$$\begin{aligned} \text{L'événement: } (X_{n+1}=1) &= [(X_{n+1}=1) \cap (X_n=0)] \cup [(X_{n+1}=1) \cap (X_n=1)] \\ &\quad \cup [(X_{n+1}=1) \cap (X_n=2)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où: } P(X_{n+1}=1) &= P(X_{n+1}=1) \cap (X_n=0) \\ &\quad + P((X_{n+1}=1) \cap (X_n=1)) \\ &\quad + P((X_{n+1}=1) \cap (X_n=2)) \\ &= [P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)] \times P(X_n=0) + [P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)] \\ &\quad \times P(X_n=1) + [P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)] \times P(X_n=2) \\ \Rightarrow P(X_{n+1}=1) &= 1 \times P(X_n=0) + \frac{1}{2} \times P(X_n=1) + 1 \times P(X_n=2). \end{aligned}$$

$$\text{Au total: } P(X_{n+1}=1) = P(X_n=0) + \frac{1}{2} \times P(X_n=1) + P(X_n=2).$$

2. a. Déterminons R_j :

$$\text{D'après l'énoncé: } R_{n+1} = R_n \times M.$$

Dans ces conditions: $R_1 = R_0 \times M$.

$$\text{D'où: } R_1 = (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R_1 = (0 \ 1 \ 0).$$

Au total: $R_1 = (0 \ 1 \ 0)$.

2. b. Montrons que pour tout entier naturel n , $R_n = R_0 \times M^n$:

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n : $R_n = R_0 \times M^n$ ".

Initialisation: • $R_0 = R_0 \times M^0 \Leftrightarrow R_0 = R_0$.

Donc vrai au rang " 0 ".

$$\begin{aligned} \bullet R_1 = R_0 \times M^1 &\Leftrightarrow R_1 = (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow R_1 = (0 \ 1 \ 0). \end{aligned}$$

Or $R_1 = (0 \ 1 \ 0)$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $R_n = R_0 \times M^n$
et montrons qu'alors: $R_{n+1} = R_0 \times M^{n+1}$.

Supposons: $R_n = R_0 \times M^n$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

$$(1) \Rightarrow R_n \times M = R_0 \times M^n \times M$$

$$\Rightarrow R_n \times M = R_0 \times M^{n+1}$$

$$\Rightarrow R_{n+1} = R_0 \times M^{n+1}.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n , nous avons:

$$R^n = R_0 \times M^n.$$

3. Établissons que pour tout entier naturel n , $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$:

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n : $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$ ".

Initialisation: • $M^0 = P \times D^0 \times P^{-1}$?

$$\begin{aligned} P \times D^0 \times P^{-1} &= P \times I_3 \times P^{-1} \\ &= P \times P^{-1} \\ &= I_3. \end{aligned}$$

$$\text{Or } M_0 = I_3.$$

Donc vrai au rang " 0 ".

• $M^1 = P \times D^1 \times P^{-1}$?

$$\begin{aligned} P \times D^1 \times P^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{-3}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Or } M' = M \iff M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$
et montrons qu'alors: $M^{n+1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}$.

Supposons: $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow M^n \times M = P \times D^n \times P^{-1} \times M \\ &\Rightarrow M^{n+1} = P \times D^n \times P^{-1} \times P \times D \times P^{-1} \\ &\Rightarrow M^{n+1} = P \times D^n \times (P^{-1} \times P) \times D \times P^{-1} \\ &\Rightarrow M^{n+1} = P \times D^n \times I_3 \times D \times P^{-1} \\ &\Rightarrow M^{n+1} = P \times D^n \times D \times P^{-1} \\ &\Rightarrow M^{n+1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}. \end{aligned}$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n , nous avons:

$$M^n = P \times D^n \times P^{-1}.$$

4. a. Calculons $D^n \times P^{-1}$ en fonction de n :

$$D^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} \left(\frac{-1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{-1}{2}\right)^n & -2 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^n & \left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Au total: $D^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} \left(\frac{-1}{2}\right)^n & -2 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^n & \left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$

\parallel
A

4. b. Déterminons les coefficients de R_n en fonction de n :

D'après la question 2., $R_n = R_0 \times M^n$.

D'où: $R_n = R_0 \times M^n \Leftrightarrow R_n = R_0 \times P \times D^n \times P^{-1}$

$$\Leftrightarrow R_n = (0 \ 0 \ 1) \times \begin{pmatrix} \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{-3}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \times \mathbf{A}$$

$$\Rightarrow R_n = \left(\frac{1}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} \quad \frac{-2}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} \right).$$

Au total: les coefficients de R_n sont respectivement

$$a = \frac{1}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}$$

$$b = \frac{-2}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}, \text{ avec: } R_n = (a \ b \ c).$$

$$c = \frac{1}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}$$

5. a. Déterminons les limites de a, b et c:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} a &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} \text{ car: } \frac{-1}{2} \in]-1; 0[. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} b &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3} \text{ car: } \frac{-1}{2} \in]-1; 0[. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} c &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} \text{ car: } \frac{-1}{2} \in]-1; 0[. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Au total: } \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n=0) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} a \\ &= \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n=1) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} b \\ &= \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n=2) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} c \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

5. b. Interprétation des résultats:

Les résultats indiquent qu'au bout d'un très grand nombre de tirages:

- il y a une chance sur six d'avoir 0 BB dans l'urne U,
- il y a deux chances sur six d'avoir 1 BB dans l'urne U,
- il y a une chance sur six d'avoir 2 BB dans l'urne U.