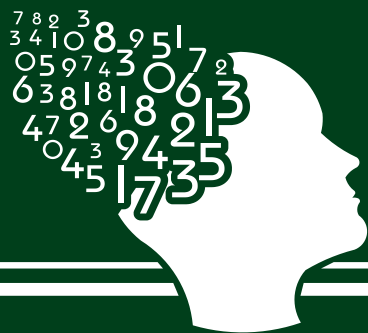


Corrigé

Exercice 3



freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. **Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.** Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 3 (3 points)

(Commun à tous les candidats)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère le point A d'affixe 4, le point B d'affixe $4i$ et les points C et D tels que $ABCD$ est un carré de centre O .

Pour tout entier naturel non nul n , on appelle M_n le point d'affixe $z_n = (1 + i)^n$.

- 1) Écrire le nombre $1 + i$ sous forme exponentielle.
- 2) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 , que l'on précisera, tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré $ABCD$.

EXERCICE 3 (Amérique du Nord 2016)

1

① Ecrivons le nombre $1+i$ sous forme exponentielle:

. Le module de $1+i$ est: $|1+i| = \sqrt{2}$.

. Soit θ , l'argument de $1+i$:

$$1+i = \sqrt{2} (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

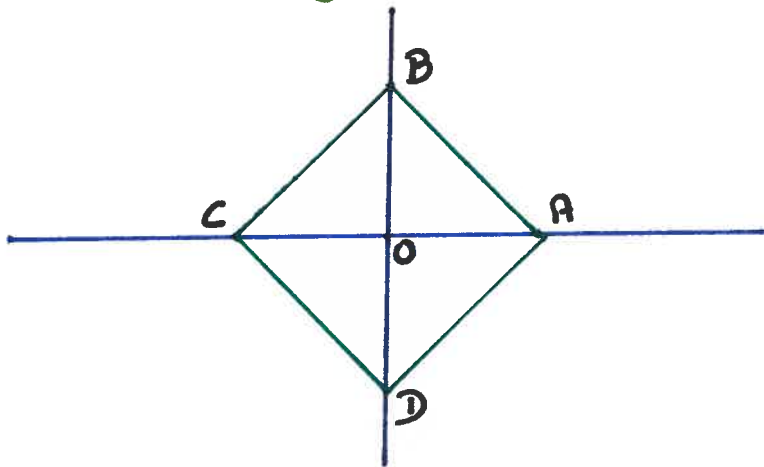
Par identification:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \underline{\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Au total, sous forme exponentielle: $1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

② Montrons qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD:

Etape 1: Représentation graphique du carré ABCD.



Etape 2: Réponse à la question posée.

Notons que la distance maximale entre le centre O et les

côtés du cube est: 4.

En effet: la longueur OA = la longueur OB
 = la longueur OC
 = la longueur OD
 = 4.

Ainsi, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD ssi: $OM_n > 4$.

$$OM_n > 4 \Leftrightarrow |z_n| > 4 \Leftrightarrow |(1+i)^n| > 4 \Rightarrow (\sqrt{2})^n > 4.$$

$$\text{Or: } (\sqrt{2})^n > 4 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^n > (\sqrt{2})^4 \Rightarrow n > 4.$$

Au total, il existe bien un entier naturel $n_0 = 5$ tel que pour tout entier $n \geq 5$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD.