EXERCICE 2

[Amérique du Nord 2016]

Partie A:

1. a. Montrons que les points " B " et " I " appartiennent à la courbe Cf de f:

Ici: • $f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2$

• $Df = [2\,;2e]$

• $B = (2e;2)$ et $I(2;0)$.

• B appartient à la courbe représentative de f ssi: $2 = (2e)\ln\left(\frac{2e}{2}\right) - 2e + 2.$

Or: $(2e)\ln\left(\frac{2e}{2}\right) - 2e + 2 = (2e) \times (1) - 2e + 2$

<=> $(2e)\ln\left(\frac{2e}{2}\right) - 2e + 2 = 2.$

Donc oui: $B \in Cf$.

• I appartient à la courbe représentative de f ssi: $0 = (2)\ln\left(\frac{2}{2}\right) - 2 + 2.$

Or: $(2)\ln\left(\frac{2}{2}\right) - 2 + 2 = (2) \times \ln(1) - 2 + 2$

<=> $(2)\ln\left(\frac{2}{2}\right) - 2 + 2 = 0.$

Donc oui: $I \in Cf$.

Au total: " B " et " I " appartiennent bien à Cf.

I. b. Montrons que l'axe des abscisses est tangent à la courbe Cf au point I:

Cela est vérifié ssi: • $I \in Cf$

et: • la dérivée de f au point I est nulle, car dans ce cas l'équation de la tangente au point I est $y = 0$.

• **$I \in Cf$, d'après la question précédente.**

• **Calculons f':**

Posons: $f = f_1 \times f_2 + f_3$, avec: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ et $f_3(x) = -x + 2$.

f_1 et f_3 sont dérivables sur IR comme fonctions polynômes, donc dérivables sur $[2\,;2e]$.

f_2 est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme fonction " ln ", donc dérivable sur $[2\,;2e]$.

Par conséquent, **$h = f_1 \times f_2$** est dérivable sur $[2\,;2e]$ comme produit de 2 fonctions dérivables sur $[2\,;2e]$.

Enfin, f est dérivable sur $[2\,;2e]$ comme somme **$(h + f_3)$** de 2 fonctions dérivables sur $[2\,;2e]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [2\,;2e]$.

Pour tout $x \in [2\,;2e]$: $f'(x) = 1 \times \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \times \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 1$

$$\Rightarrow f'(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

Dans ces conditions, au point $I\,(2\,;0)$: $f'(2) = 0$.

Donc la dérivée de f au point I est bien nulle.

Au total: l'axe des abscisses est bien tangent à la courbe Cf au point I.

2. a. Déterminons une équation de la droite T et les coordonnées du point D:

D'après l'énoncé:
- T est tangente à Cf au point $B(2e;2)$
- D est le point d'ntersection de T avec l'axe des abscisses.

Étape 1: on détermine l'équation de la tangente T.

Nous savons que:
- pour tout $x \in [2;2e]$, $f'(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$
- l'équation de T est: $\boldsymbol{y - y_B = f'(B)\,(x - x_B)}$.

D'où, l'équation de la droite T est: $y - 2 = f'(2e)\,(x - 2e) \Rightarrow y = x - 2e + 2$.

Ainsi, l'équation de la droite T est: $y = x - 2e + 2$.

Étape 2: on détermine les coordonnées du point D.

Comme D est sur l'axe des abscisses: $y_D = 0$.

Dans ces conditions, nous avons:

$y = x - 2e + 2 \iff 0 = x - 2e + 2 \Rightarrow x_D = 2e - 2$.

Ainsi, le point D est tel que: $D(2e - 2;0)$.

2. b. Déterminons un encadrement du volume de la cuve:

- S est encadrée par:
  - l'aire du triangle ABI
  - l'aire du trapèze AIDB.

Or: • l'aire du triangle ABI, qui est rectangle en A, est: $\mathscr{A}1 = \frac{1}{2}[AI \times AB]$,

• l'aire du trapèze AIDB est: $\mathscr{A}2 = \frac{1}{2}(ID + AB) \times AI$.

Nous obtenons ainsi: $\mathscr{A}1 = (2e - 2)m^2$ et $\mathscr{A}2 = (4e - 6)m^2$.

En conclusion, S est telle que: $\mathscr{A}1 < S < \mathscr{A}2$ ou encore: $2e - 2 < S < 4e - 6$.

- Nous savons que la longueur de la cuve est de 5 mètres.

Dans ces conditions, le volume V de la cuve est tel que: $5(2e - 2) < V < 5(4e - 6)$

cad: $17,18 < V < 24,37$.

Ainsi, le volume V de la cuve est compris entre: $17,18\ m^3$ et $24,37\ m^3$.

3. a. Montrons que G est une primitive de g:

$G(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$, et: $g(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

Ici: g est continue sur $[2;2e]$. Elle admet donc une primitive G dérivable sur l'intervalle $[2;2e]$ et G est telle que: $G' = g$.

Pour tout $x \in [2;2e]$: $G'(x) = \left(\frac{2x}{2}\right)\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{2}$

$\Leftrightarrow G'(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} - \frac{x}{2}$

$\Rightarrow G'(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

Au total, on a bien pour tout $x \in [2;2e]$: G est une primitive de g car $G' = g$.

3. b. Déduisons-en une primitive F de f sur $[2;2e]$:

Nous remarquons que: $f(x) = g(x) - x + 2$, pour tout $x \in [2;2e]$.

Dans ces conditions, nous avons, pour tout $x \in [2;2e]$:

$$F(x) = G(x) + \int(-x+2)dx$$

$$\Longleftrightarrow \; F(x) = G(x) + \left[\frac{-x^2}{2} + 2x\right]$$

$$\Longleftrightarrow \; F(x) = \left(\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right)\frac{-x^2}{4}\right) + \left(\frac{-x^2}{2} + 2x\right)$$

$$\Longrightarrow \; F(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3x^2}{4} + 2x.$$

Au total, une primitive F de f sur $[2;2e]$ est: $F(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3}{4}x^2 + 2x.$

3. c. c1. Déterminons la valeur exacte de S:

$$S = AB \times AI - \int_2^{2e} f(x)dx \Longleftrightarrow S = (2e-2)\times 2 - \int_2^{2e} f(x)dx$$

$$\Longleftrightarrow \; S = (4e-4) - \left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3}{4}x^2 + 2x\right]_2^{2e}$$

$$\Longrightarrow \; S = (e^2 - 3)m^2.$$

Au total, la valeur exacte de S est: $(e^2 - 3)m^2$.

3. c. c2. Déduisons-en une valeur approchée du volume V:

Nous savons que la longueur de la cuve est de 5 mètres.

Dans ces conditions: $V = 5 \times (e^2 - 3)$

$$\Longrightarrow \; V \approx 22\,m^3, \text{ au } m^3 \text{ près.}$$

Au total, une valeur approchée du volume V est: $V \approx 22\,m^3$, au m^3 près.

Partie B:

1. Déterminons le volume d'eau demandé:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

Il s'agit de déterminer $V(x)$ quand $f(x) = 1$.

Par tâtonnement et à l'aide d'une machine à calculer:

$f(\alpha) = 1$ quand $\alpha \in [4,31 ; 4,32]$.

Dans ces conditions, et d'après le théorème des valeurs intermédiaires:

$V(4,31) \leqslant V(\alpha) \leqslant V(4,32) \iff 7,44 \leqslant V(x) \leqslant 7,53$.

En conclusion, le volume d'eau demandé est: $7\,m^3$, au m^3 près.

2. Interprétons le résultat de l'algorithme:

L'algorithme permet d'afficher la hauteur d'eau dans la cuve lorsque cette dernière est à moitié remplie.