EXERCICE 1

[Amérique du Nord 2016]

Partie A: Billes en bois sphériques

1. Déterminons la probabilité que la bille soit vendable et provienne de la machine A:

D'après l'énoncé, nous avons:

- A = " la bille a été fabriquée par la machine A ".
- B = " la bille a été fabriquée par la machine B ".
- S = " la bille est vendable ".

- $P(A) = 60\%$
- $P(B) = 40\%$

$(60\% + 40\% = 1)$.

- $P_A(V) = 98\%$
- $P_A(\overline{V}) = 2\%$

$(98\% + 2\% = 1)$.

- $P(V) = 96\%$
- $P(\overline{V}) = 4\%$

$(96\% + 4\% = 1)$.

Ici, nous devons calculer: $P(A \cap V)$.

$P(A \cap V) = P_A(V) \times P(A)$.

Ainsi: $P(A \cap V) = 98\% \times 60\%$ => $P(A \cap V) = 58.8\%$.

Au total, il y a 58.8% de chance pour que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.

2. a. Justifions que $P(B \cap V) = 0.372$:

L'évènement $V = (V \cap A) \cup (V \cap B)$.

D'où: $P(V) = P(V \cap A) + P(V \cap B)$.

Or: $P(V) = 96\%$ et $P(V \cap A) = 58.8\%$.

Dans ces conditions:

$P(V \cap B) = 96\% - 58.8\%$ => $P(V \cap B) = 37.2\%$.

Au total, il y a 37.2% de chance pour que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine B.

2. b. Déterminons la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B:

Cela revient à calculer: $P_B(V)$.

$$P_B(V) = \frac{P(B \cap V)}{P(B)}.$$

Ainsi: $P_B(V) = \frac{37.2\%}{40\%}$ => $P_B(V) = 93\%$.

Au total, il y a 93% de chance pour que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.

3. Le technicien a-t-il raison ?

Pour le savoir, nous allons calculer: $P_{\overline{V}}(B)$.

Or: $P_{\overline{V}}(B) = \dfrac{P(\overline{V} \cap B)}{P(\overline{V})}$

$$= \frac{P_B(\overline{V}) \times P(B)}{P(\overline{V})}$$

$$= \frac{(1 - P_B(V)) \times P(B)}{P(\overline{V})}.$$

Ainsi: $P_{\overline{V}}(B) = \dfrac{(1 - 93\%) \times 40\%}{4\%}$ => $P_{\overline{V}}(B) = 70\%$.

Au total, 70% des billets non vendables proviennent de la machine B.

Par conséquent, le technicien a raison.

EXERCICE 1

[Amérique du Nord 2016]

Partie B: Le diamètre des billes

1. Déterminons la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X est la variable aléatoire qui correspond au diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine B (en cm).
- X suit la loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart type $\sigma = 0,055$.

Il s'agit de calculer: $P(0,9 \leqslant X \leqslant 1,1)$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(0,9 \leqslant X \leqslant 1,1) \approx 0,93.$$

Au total, la probabilité demandée est bien celle trouvée dans la partie A à savoir: 93%.

2. Sachant que $P(0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1) = 0,98$, déterminons σ':

D'après l'énoncé, nous savons que:

- Y est la variable aléatoire qui correspond au diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine A (en cm).
- Y suit la loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart type $\sigma = \sigma' = ?$
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de déterminer σ' sachant que: $P(0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1) = 0,98$.

$$P(0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1) = 0,98 \iff P\left(\frac{0,9-1}{\sigma'} \leqslant \frac{Y-\mu}{\sigma'} \leqslant \frac{1,1-1}{\sigma'}\right) = 0,98$$

$$\iff P\left(\frac{-0,1}{\sigma'} \leqslant T \leqslant \frac{0,1}{\sigma'}\right) = 0,98$$

$$\iff 2 \times P\left(T \leqslant \frac{0,1}{\sigma'}\right) - 1 = 98\%$$

$$\Rightarrow P\left(T \leqslant \frac{0,1}{\sigma'}\right) = 99\%.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{0,1}{\sigma'} \approx 2,325 \Rightarrow \sigma' \approx 0,043.$$

Au total, la valeur de σ' est: $\sigma' \approx 0,043$.

Partie C: La couleur des billes

1. a. Déterminons la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes:

Soit l'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard un sachet de 40 billes.

Soient les événements A = " la bille est noire ", et $\overline{A}$ = " la bille n'est pas noire ".

On désigne par Z le nombre de billes noires parmi les 40 billes contenues dans le sachet tiré au hasard.

Nous sommes en présence de 40 épreuves aléatoires indépendantes, avec $\Omega = \{A\,;\overline{A}\}$ et $Z(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, 40\}$.

La variable aléatoire discrète Z représentant le nombre de réalisations de A suit donc une loi binômiale de paramètres: $n = 40$ et $p = 20\%$ (car les 5 couleurs sont équiprobables).

Et nous pouvons noter: $Z \rightsquigarrow B\,(40\,;\,20\%)$.

En fait, on répète 40 fois un schéma de Bernoulli.

Ici, nous devons calculer: $P\,(Z = 10)$ avec: $Z \rightsquigarrow B\,(40\,;\,20\%)$.

Or: $P\,(Z = 10) = \binom{40}{10}\,(20\%)^{10}\,(80\%)^{30}$

$\Rightarrow$ $P\,(Z = 10) \approx 10,7\%$.

(à l'aide d'une machine à calculer)

Au total, la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes est de: 10,7%.

1. b. Ce constat permet-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes ?

Ici, nous avons:
- $n = 40$
- $p = 20\%$
- $f = \frac{12}{40}$ $\Rightarrow$ $f = 30\%$.

Dans ces conditions:

$n = 40 \geqslant 30$, $n\,.\,p = 8 \geqslant 5$ et $n\,.\,(1 - p) = 32 \geqslant 5$.

Les conditions sont donc réunies.

On choisit un échantillon aléatoire, un sachet de 40 billes, parmi tous les sachets de 40 billes.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[\,p - 1,96 \times \left(\frac{p\,(1-p)}{n}\right)^{1/2}\,;\,p + 1,96 \times \left(\frac{p\,(1-p)}{n}\right)^{1/2}\,\right].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$I = [\,7,6\ \%\ ;\ 32,4\ \%\,].$$

La fréquence de billes noires " f ", sur l'échantillon, est telle que:

$$f = 30\% \in I.$$

Ainsi, le constat ne remet pas en cause le réglage de la machine qui teinte les billes.

2. Déterminons le nombre minimal de billes " n ":

Ici, nous avons: $P(Z \geqslant 1) \geqslant 0,99$.

$$P(Z \geqslant 1) \geqslant 0,99 \iff 1 - P(Z = 0) \geqslant 0,99$$

$$\iff P(Z = 0) \leqslant 1\%$$

$$\iff \binom{n}{0} (20\%)^0 (80\%)^n \leqslant 1\%$$

$$\iff (0,8)^n \leqslant 1\%$$

$$\iff n \ln(0,8) \leqslant \ln(0,01)$$

$$\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \quad (\ln(0,8) < 0)$$

$$\Rightarrow n \geqslant 20,637 \quad \text{soit} \quad n \geqslant 21.$$

Au total, le nombre minimal de billes que chaque sachet doit contenir est:

$$n = 21 \text{ billes.}$$