Corrigé

Exercice 1

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. **Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.** Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 1 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Les parties A, B *et* C *sont indépendantes.*

Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

• 96 % de la production journalière est vendable.
• La machine A fournit 60 % de la production journalière.
• La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les évènements suivants :
A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;
B : « la bille a été fabriquée par la machine B » ;
V : « la bille est vendable ».

1) Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.

2) Justifier que $P(B \cap V) = 0,372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.

3) Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B.
A-t-il raison ?

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre, exprimé en cm, des billes produites par les machines A et B.

1) Une étude statistique conduit à modéliser le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine B par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0,055$.
Vérifier que la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable est bien celle trouvée dans la partie A, au centième près.

2) De la même façon, le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine A est modélisé à l'aide d'une variable aléatoire Y qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type σ', σ' étant un réel strictement positif.
Sachant que $P(0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1) = 0,98$, déterminer une valeur approchée au millième de σ'.

Partie C

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Apès avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.
Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

1) Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.

a) On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à 10^{-3}.

b) Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-t-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes ?

2) Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 %, quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif ?

EXERCICE 1

[Amérique du Nord 2016]

Partie A: Billes en bois sphériques

1. Déterminons la probabilité que la bille soit vendable et provienne de la machine A:

D'après l'énoncé, nous avons:

- A = " la bille a été fabriquée par la machine A ".
- B = " la bille a été fabriquée par la machine B ".
- S = " la bille est vendable ".

- $P(A) = 60\%$
- $P(B) = 40\%$

$(60\% + 40\% = 1)$.

- $P_A(V) = 98\%$
- $P_A(\overline{V}) = 2\%$

$(98\% + 2\% = 1)$.

- $P(V) = 96\%$
- $P(\overline{V}) = 4\%$

$(96\% + 4\% = 1)$.

Ici, nous devons calculer: $P(A \cap V)$.

$P(A \cap V) = P_A(V) \times P(A)$.

Ainsi: $P(A \cap V) = 98\% \times 60\%$ => $P(A \cap V) = 58.8\%$.

Au total, il y a 58.8% de chance pour que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.

2. a. Justifions que $P(B \cap V) = 0.372$:

L'évènement $V = (V \cap A) \cup (V \cap B)$.

D'où: $P(V) = P(V \cap A) + P(V \cap B)$.

Or: $P(V) = 96\%$ et $P(V \cap A) = 58.8\%$.

Dans ces conditions:

$P(V \cap B) = 96\% - 58.8\%$ => $P(V \cap B) = 37.2\%$.

Au total, il y a 37.2% de chance pour que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine B.

2. b. Déterminons la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B:

Cela revient à calculer: $P_B(V)$.

$$P_B(V) = \frac{P(B \cap V)}{P(B)}.$$

Ainsi: $P_B(V) = \dfrac{37.2\%}{40\%}$ => $P_B(V) = 93\%$.

Au total, il y a 93% de chance pour que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.

3. Le technicien a-t-il raison ?

Pour le savoir, nous allons calculer: $P_{\overline{V}}(B)$.

Or : $P_{\overline{V}}(B) = \dfrac{P(\overline{V} \cap B)}{P(\overline{V})}$

$= \dfrac{P_B(\overline{V}) \times P(B)}{P(\overline{V})}$

$= \dfrac{(1 - P_B(V)) \times P(B)}{P(\overline{V})}$.

Ainsi : $P_{\overline{V}}(B) = \dfrac{(1 - 93\%) \times 40\%}{4\%}$ => $P_{\overline{V}}(B) = 70\%$.

Au total, 70% des billets non vendables proviennent de la machine B.

Par conséquent, le technicien a raison.

freemaths.fr

EXERCICE 1

[Amérique du Nord 2016]

Partie B: Le diamètre des billes

1. Déterminons la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X est la variable aléatoire qui correspond au diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine B (en cm).
- X suit la loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart type $\sigma = 0,055$.

Il s'agit de calculer: $P(0,9 \leqslant X \leqslant 1,1)$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$P(0,9 \leqslant X \leqslant 1,1) \approx 0,93$.

Au total, la probabilité demandée est bien celle trouvée dans la partie A à savoir: 93%.

2. Sachant que $P(0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1) = 0,98$, déterminons σ':

D'après l'énoncé, nous savons que:

- Y est la variable aléatoire qui correspond au diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine A (en cm).
- Y suit la loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart type $\sigma = \sigma' = ?$
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de déterminer σ' sachant que: $P(0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1) = 0,98$.

$$P(0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1) = 0,98 \iff P\left(\frac{0,9-1}{\sigma'} \leqslant \frac{Y-\mu}{\sigma'} \leqslant \frac{1,1-1}{\sigma'}\right) = 0,98$$

$$\iff P\left(\frac{-0,1}{\sigma'} \leqslant T \leqslant \frac{0,1}{\sigma'}\right) = 0,98$$

$$\iff 2 \times P\left(T \leqslant \frac{0,1}{\sigma'}\right) - 1 = 98\%$$

$$\Rightarrow P\left(T \leqslant \frac{0,1}{\sigma'}\right) = 99\%.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{0,1}{\sigma'} \approx 2,325 \Rightarrow \sigma' \approx 0,043.$$

Au total, la valeur de σ' est: $\sigma' \approx 0,043$.

Partie C: La couleur des billes

1. a. Déterminons la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes:

Soit l'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard un sachet de 40 billes.

Soient les événements A = " la bille est noire ", et $\overline{A}$ = " la bille n'est pas noire ".

On désigne par Z le nombre de billes noires parmi les 40 billes contenues dans le sachet tiré au hasard.

Nous sommes en présence de 40 épreuves aléatoires indépendantes, avec $\Omega = \{ A \,;\, \overline{A} \}$ et $Z(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, 40\}$.

La variable aléatoire discrète Z représentant le nombre de réalisations de A suit donc une loi binômiale de paramètres: $n = 40$ et $p = 20\%$ (car les 5 couleurs sont équiprobables).

Et nous pouvons noter: $Z \rightsquigarrow B\,(40\,;\,20\%)$.

En fait, on répète 40 fois un schéma de Bernoulli.

Ici, nous devons calculer: $P\,(Z = 10)$ avec: $Z \rightsquigarrow B\,(40\,;\,20\%)$.

Or: $P\,(Z = 10) = \binom{40}{10}\,(20\%)^{10}\,(80\%)^{30}$

$\Rightarrow$ $P\,(Z = 10) \approx 10,7\%$.

(à l'aide d'une machine à calculer)

Au total, la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes est de: 10, 7%.

1. b. Ce constat permet-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes ?

Ici, nous avons:
- $n = 40$
- $p = 20\%$
- $f = \dfrac{12}{40}$ $\Rightarrow$ $f = 30\%$.

Dans ces conditions:

$n = 40 \geqslant 30$, $n\,.\,p = 8 \geqslant 5$ et $n\,.\,(1 - p) = 32 \geqslant 5$.

Les conditions sont donc réunies.

On choisit un échantillon aléatoire, un sachet de 40 billes, parmi tous les sachets de 40 billes.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[\,p - 1,96 \times \left(\frac{p\,(1-p)}{n}\right)^{1/2} ;\, p + 1,96 \times \left(\frac{p\,(1-p)}{n}\right)^{1/2}\right].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$I = [\,7,6\ \%\ ;\ 32,4\ \%\,].$$

La fréquence de billes noires " f ", sur l'échantillon, est telle que:

$$f = 30\% \in I.$$

Ainsi, le constat ne remet pas en cause le réglage de la machine qui teinte les billes.

2. Déterminons le nombre minimal de billes " n ":

Ici, nous avons: $P\,(Z \geqslant 1) \geqslant 0,99.$

$$P\,(Z \geqslant 1) \geqslant 0,99 \iff 1 - P\,(Z = 0) \geqslant 0,99$$

$$\iff P\,(Z = 0) \leqslant 1\%$$

$$\iff \binom{n}{0}\,(20\%)^0\,(80\%)^n \leqslant 1\%$$

$$\iff (0,8)^n \leqslant 1\%$$

$$\iff n\,\ln(0,8) \leqslant \ln(0,01)$$

$$\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \quad (\ln(0,8) < 0)$$

$$\Rightarrow n \geqslant 20,637 \quad \text{soit} \quad n \geqslant 21.$$

Au total, le nombre minimal de billes que chaque sachet doit contenir est:

$$n = 21 \text{ billes.}$$