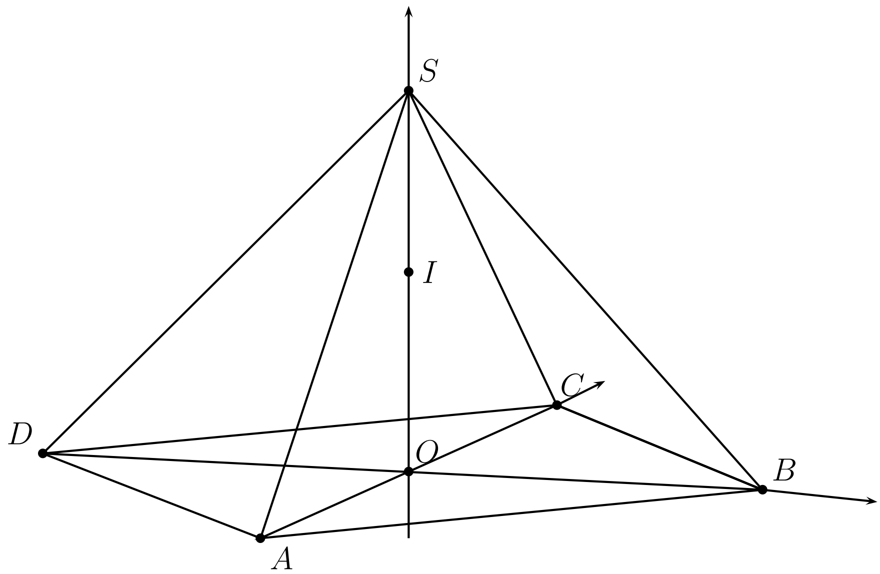
EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On considère la pyramide régulière $SABCD$ de sommet S constituée de la base carrée $ABCD$ et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base $ABCD$ avec $OB = 1$.
On rappelle que le segment $[SO]$ est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1) Justifier que le repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OS}\right)$ est orthonormé.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OS}\right)$.

2) On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu du segment $[SO]$.

a) Déterminer les coordonnées du point K.

b) En déduire que les points B, I et K sont alignés.

c) On note L le point d'intersection de l'arête $[SA]$ avec le plan (BCI).
Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

d) Déterminer les coordonnées du point L.

3) On considère le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OS}\right)$.

a) Montrer que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI).

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires.

c) Quelle est la position relative des plans (BCI) et (SAD) ?

EXERCICE 4

[Amérique du Nord 2016]

1. Justifions que le repère $(O ; \overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OC} ; \overrightarrow{OS})$ est orthonormé:

Le repère $(O ; \overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OC} ; \overrightarrow{OS})$ est orthonormé ssi:

1. $\|\overrightarrow{OB}\| = \|\overrightarrow{OC}\| = \|\overrightarrow{OS}\| = 1$;

2. Les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OS}$, et les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OS}$, cad:

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OS} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OS} = 0.$$

1. Ici: • ABCD est un carré de centre O avec $OB = 1$.

Dans ces conditions, nous pouvons affirmer que:

$$\|\overrightarrow{OB}\| = 1 \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{OC}\| = 1.$$

• Qu'en est-il de $\|\overrightarrow{OS}\|$?

Le segment [SO] est la hauteur de la pyramide.

Par conséquent, le triangle SOC est rectangle en O.

Ainsi, d'après Pythagore: $SC^2 = OC^2 + OS^2$

ou encore: $OS^2 = SC^2 - OC^2$.

Or: • $SC^2 = AB^2$ car les arêtes ont la même longueur ;

• et d'après Pythagore: $AB^2 = OA^2 + OB^2$

$\Rightarrow AB^2 = 2.$

Dans ces conditions: $OS^2 = 2 - 1 \Rightarrow OS^2 = 1$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{OS}\| = 1.$

En définitive: $\|\overrightarrow{OB}\| = \|\overrightarrow{OC}\| = \|\overrightarrow{OS}\| = 1.$

2. Ici: • $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux car les diagonales d'un carré sont toujours perpendiculaires: $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0.$

• (SO) est la hauteur de la pyramide, donc (SO) est perpendiculaire à la base carrée ABCD. Donc le vecteur $\overrightarrow{OS}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$: $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OS} = 0$ et $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OS} = 0.$

En définitive, nous avons bien: $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OS} = 0$ et $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OS} = 0.$

Au total: le repère $(O ; \overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OC} ; \overrightarrow{OS})$ est bien orthonormé.

2. a. Déterminons les coordonnées du point K:

$\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OD} \iff \overrightarrow{SD} = - \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OB}.$

Dans ces conditions, dans le repère orthonormé $(O ; \overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OC} ; \overrightarrow{OS})$:

$$\overrightarrow{SD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Or: $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3} \overrightarrow{SD} \iff \overrightarrow{SK} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$

$$\overrightarrow{SK} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\iff \overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \left(\text{car } \overrightarrow{SO} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Ainsi les coordonnées du point K sont: $K\left(-\frac{1}{3}; 0; \frac{2}{3}\right)$.

2. b. Déduisons-en que les points B, I et K sont alignés:

D'après le cours: **les points B, I et K sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires.**

Ici: $B(1; 0; 0)$, $I\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$ et $K\left(-\frac{1}{3}; 0; \frac{2}{3}\right)$.

D'où: $\overrightarrow{BI} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

Or, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires ssi il existe un réel α tel que: $\overrightarrow{BI} = \alpha \cdot \overrightarrow{IK}$.

$$\overrightarrow{BI} = \alpha \cdot \overrightarrow{IK} \iff \begin{cases} -1 = -\frac{1}{3}\alpha \\ 0 = 0 \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\alpha \end{cases} \implies \{ \alpha = 3.$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires.

Au total: les points B, I et K sont alignés.

2. c. Justifions que les droites (AD) et (KL) sont parallèles:

Nous allons appliquer le théorème du **Toit** pour répondre à cette question.

Selon ce théorème: **Soient d_1 et d_2 deux droites parallèles contenues respectivement dans les plans P_1 et P_2. Si ces deux plans P_1 et P_2 sont sécants en une droite Δ, alors la droite Δ est parallèle à d_1 et d_2.**

Ici:
- les plans (ADS) et (BCI) sont sécants en une droite $\Delta = (KL)$;
- (AD) est une droite du plan (ADS);
- (BC) est une droite du plan (BCI);
- les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Ainsi: d'après le théorème du **Toit**, la droite $\Delta = (KL)$ est parallèle à:

$$d_1 = (AD) \text{ et } d_2 = (BC).$$

2. d. Déterminons les coordonnées du point L:

D'après la question précédente: la droite $\Delta = (KL)$ est parallèle à la droite $d_1 = (AD)$.

Dans ces conditions, les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont parallèles cad colinéaires.

Soient: • $\overrightarrow{KL} = \begin{pmatrix} x_L + \frac{1}{3} \\ y_L - 0 \\ z_L - \frac{2}{3} \end{pmatrix}$;

• $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} \iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \implies \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires, il existe un réel α tel que: $\overrightarrow{KL} = \alpha \cdot \overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{KL} = \alpha \cdot \overrightarrow{AD} \iff \begin{cases} x_L + \frac{1}{3} = \alpha \\ y_L = -\alpha \\ z_L - \frac{2}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_L + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ y_L = -\frac{1}{3} \\ z_L = \frac{2}{3} \end{cases} \qquad \left(\alpha = \frac{1}{3} \text{ d'après } \mathbf{2}.\right)$$

$$\implies \begin{cases} x_L = 0 \\ y_L = -\frac{1}{3}. \\ z_L = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Au total, les coordonnées du point L sont: $L\left(0; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

3. a. Montrons que $\vec{n}\ (1\,;\,1\,;\,2)$ est un vecteur normal au plan (BCI):

D'après le cours: **un vecteur $\vec{n}\ (a\,;\,b\,;\,c)$ est normal à un plan ssi ce vecteur est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.**

Ici: • il s'agit du plan (BCI);

• 2 vecteurs non colinéaires de ce plan sont respectivement:

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad (\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \text{ et } \overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OI});$$

• $\vec{n}\ (1\,;\,1\,;\,2)$.

De plus: • $\vec{n}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux car: $(-1 \times 1) + (1 \times 1) + (0 \times 2) = 0$;

• $\vec{n}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont orthogonaux car: $(-1 \times 1) + (0 \times 1) + (\frac{1}{2} \times 2) = 0$.

Par conséquent: $\vec{n}$ est bien orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan. Donc $\vec{n}\ (1\,;\,1\,;\,2)$ est un vecteur normal au plan (BCI).

3. b. Montrons que les vecteurs $\vec{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires:

D'après le cours: **soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires, et $\vec{w}$ un vecteur. $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi il existe deux réels α et β tels que:**

$$\vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}.$$

Ici: • $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont deux vecteurs non colinéaires;

• $\vec{n}\ (1\,;\,1\,;\,2)$.

Dans ces conditions: $\vec{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires ssi il existe deux réels α et β tels que: $\vec{n} = \alpha \cdot \overrightarrow{AS} + \beta \cdot \overrightarrow{DS}$.

Or: $\vec{n} = 1 \cdot \overrightarrow{AS} + 1 \cdot \overrightarrow{DS}$ $\left(\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Ainsi, il existe bien deux réels α et β (ici $\alpha = 1$ et $\beta = 1$) qui sont tels que:

$$\vec{n} = \alpha \cdot \overrightarrow{AS} + \beta \cdot \overrightarrow{DS}.$$

Au total: les vecteurs $\vec{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires.

3. c. Déterminons la position relative des plans (BCI) et (SAD):

A l'aide du graphique: les 2 plans (BCI) et (SAD) sont orthogonaux.