Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

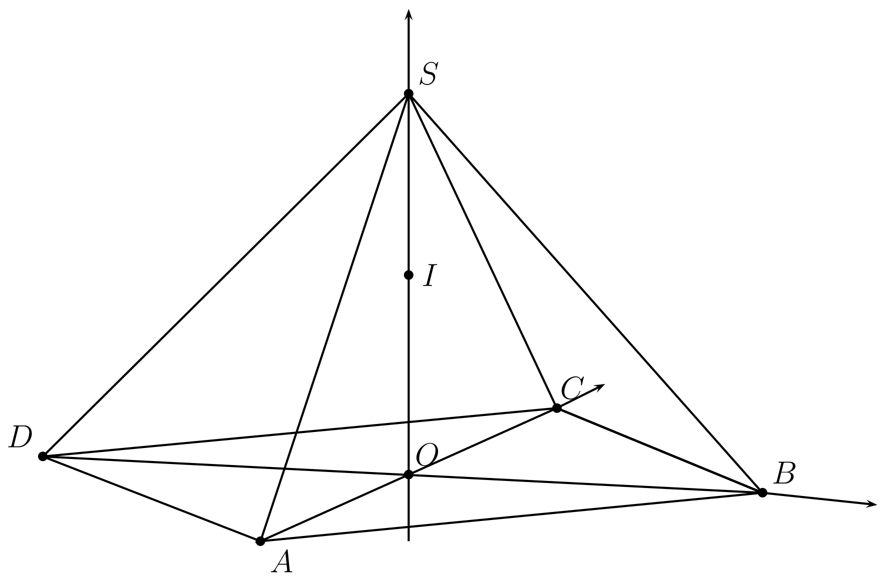
Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On considère la pyramide régulière $SABCD$ de sommet S constituée de la base carrée $ABCD$ et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base $ABCD$ avec $OB = 1$.
On rappelle que le segment $[SO]$ est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1) Justifier que le repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OS}\right)$ est orthonormé.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OS}\right)$.

2) On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu du segment $[SO]$.

a) Déterminer les coordonnées du point K.

b) En déduire que les points B, I et K sont alignés.

c) On note L le point d'intersection de l'arête $[SA]$ avec le plan (BCI).
Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

d) Déterminer les coordonnées du point L.

3) On considère le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OS}\right)$.

a) Montrer que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI).

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires.

c) Quelle est la position relative des plans (BCI) et (SAD) ?

EXERCICE 4

[Amérique du Nord 2016]

1. Justifions que le repère $(O ; \overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OC} ; \overrightarrow{OS})$ est orthonormé:

Le repère $(O ; \overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OC} ; \overrightarrow{OS})$ est orthonormé ssi:

1. $|| \overrightarrow{OB} || = || \overrightarrow{OC} || = || \overrightarrow{OS} || = 1$;

2. Les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OS}$, et les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OS}$, cad:

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OS} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OS} = 0.$$

1. Ici: • ABCD est un carré de centre O avec $OB = 1$.

Dans ces conditions, nous pouvons affirmer que:

$$|| \overrightarrow{OB} || = 1 \quad \text{et} \quad || \overrightarrow{OC} || = 1.$$

• Qu'en est-il de $|| \overrightarrow{OS} ||$?

Le segment [SO] est la hauteur de la pyramide.

Par conséquent, le triangle SOC est rectangle en O.

Ainsi, d'après Pythagore: $SC^2 = OC^2 + OS^2$

ou encore: $OS^2 = SC^2 - OC^2$.

Or: • $SC^2 = AB^2$ car les arêtes ont la même longueur ;

• et d'après Pythagore: $AB^2 = OA^2 + OB^2$

$\Rightarrow\ AB^2 = 2.$

Dans ces conditions: $OS^2 = 2 - 1 \Rightarrow OS^2 = 1$

$\Rightarrow\ \|\overrightarrow{OS}\| = 1.$

En définitive: $\|\overrightarrow{OB}\| = \|\overrightarrow{OC}\| = \|\overrightarrow{OS}\| = 1.$

2. Ici: • $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux car les diagonales d'un carré sont toujours perpendiculaires: $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0.$

• (SO) est la hauteur de la pyramide, donc (SO) est perpendiculaire à la base carrée ABCD. Donc le vecteur $\overrightarrow{OS}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$: $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OS} = 0$ et $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OS} = 0.$

En définitive, nous avons bien: $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OS} = 0$ et $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OS} = 0.$

Au total: le repère $(O ; \overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OC} ; \overrightarrow{OS})$ est bien orthonormé.

2. a. Déterminons les coordonnées du point K:

$\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OD} \iff \overrightarrow{SD} = -\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OB}.$

Dans ces conditions, dans le repère orthonormé $(O ; \overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OC} ; \overrightarrow{OS})$:

$$\overrightarrow{SD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Or: $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD} \iff \overrightarrow{SK} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$

$$\overrightarrow{SK} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\iff \overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \left(\text{car } \overrightarrow{SO} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Ainsi les coordonnées du point K sont: $K\left(-\frac{1}{3}; 0; \frac{2}{3}\right)$.

2. b. Déduisons-en que les points B, I et K sont alignés:

D'après le cours: **les points B, I et K sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires.**

Ici: $B(1; 0; 0)$, $I\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$ et $K\left(-\frac{1}{3}; 0; \frac{2}{3}\right)$.

D'où: $\overrightarrow{BI} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

Or, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires ssi il existe un réel α tel que: $\overrightarrow{BI} = \alpha \cdot \overrightarrow{IK}$.

$$\overrightarrow{BI} = \alpha \cdot \overrightarrow{IK} \iff \begin{cases} -1 = -\dfrac{1}{3}\alpha \\ 0 = 0 \\ \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}\alpha \end{cases} \Rightarrow \{ \alpha = 3.$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires.

Au total: les points B, I et K sont alignés.

2. c. Justifions que les droites (AD) et (KL) sont parallèles:

Nous allons appliquer le théorème du **Toit** pour répondre à cette question.

Selon ce théorème: **Soient d_1 et d_2 deux droites parallèles contenues respectivement dans les plans P_1 et P_2. Si ces deux plans P_1 et P_2 sont sécants en une droite Δ, alors la droite Δ est parallèle à d_1 et d_2.**

Ici:
- les plans (ADS) et (BCI) sont sécants en une droite $\Delta = (KL)$;
- (AD) est une droite du plan (ADS);
- (BC) est une droite du plan (BCI);
- les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Ainsi: d'après le théorème du **Toit**, la droite $\Delta = (KL)$ est parallèle à:

$$d_1 = (AD) \text{ et } d_2 = (BC).$$

2. d. Déterminons les coordonnées du point L:

D'après la question précédente: la droite $\Delta = (KL)$ est parallèle à la droite $d_1 = (AD)$.

Dans ces conditions, les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont parallèles cad colinéaires.

Soient: • $\overrightarrow{KL} = \begin{pmatrix} x_L + \frac{1}{3} \\ y_L - 0 \\ z_L - \frac{2}{3} \end{pmatrix}$;

• $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}$ <=> $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$ => $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires, il existe un réel α tel que: $\overrightarrow{KL} = \alpha \cdot \overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{KL} = \alpha \cdot \overrightarrow{AD} \iff \begin{cases} x_L + \frac{1}{3} = \alpha \\ y_L = -\alpha \\ z_L - \frac{2}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_L + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ y_L = -\frac{1}{3} \\ z_L = \frac{2}{3} \end{cases} \qquad \left(\alpha = \frac{1}{3} \text{ d'après } \mathbf{2}.\right)$$

$$\implies \begin{cases} x_L = 0 \\ y_L = -\frac{1}{3}. \\ z_L = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Au total, les coordonnées du point L sont: $L\left(0; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

3. a. Montrons que $\vec{n}$ (1 ; 1 ; 2) est un vecteur normal au plan (BCI):

D'après le cours: **un vecteur $\vec{n}$ (a ; b ; c) est normal à un plan ssi ce vecteur est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.**

Ici: • il s'agit du plan (BCI);

• 2 vecteurs non colinéaires de ce plan sont respectivement:

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad (\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \text{ et } \overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OI});$$

• $\vec{n}$ (1 ; 1 ; 2).

De plus: • $\vec{n}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux car: $(-1 \times 1) + (1 \times 1) + (0 \times 2) = 0$;

• $\vec{n}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont orthogonaux car: $(-1 \times 1) + (0 \times 1) + (\frac{1}{2} \times 2) = 0$.

Par conséquent: $\vec{n}$ est bien orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan. Donc $\vec{n}$ (1 ; 1 ; 2) est un vecteur normal au plan (BCI).

3. b. Montrons que les vecteurs $\vec{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires:

D'après le cours: **soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires, et $\vec{w}$ un vecteur. $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi il existe deux réels α et β tels que:**

$$\vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}.$$

Ici: • $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont deux vecteurs non colinéaires;

• $\vec{n}$ (1 ; 1 ; 2).

Dans ces conditions: $\vec{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires ssi il existe deux réels α et β tels que: $\vec{n} = \alpha \cdot \overrightarrow{AS} + \beta \cdot \overrightarrow{DS}$.

Or: $\vec{n} = 1 \cdot \overrightarrow{AS} + 1 \cdot \overrightarrow{DS}$ $\left(\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Ainsi, il existe bien deux réels α et β (ici $\alpha = 1$ et $\beta = 1$) qui sont tels que:

$$\vec{n} = \alpha \cdot \overrightarrow{AS} + \beta \cdot \overrightarrow{DS}.$$

Au total: les vecteurs $\vec{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires.

3. c. Déterminons la position relative des plans (BCI) et (SAD):

A l'aide du graphique: les 2 plans (BCI) et (SAD) sont orthogonaux.