EXERCICE 3 (Amérique du Nord 2016)

① Écrivons le nombre $1+i$ sous forme exponentielle :

. Le module de $1+i$ est : $|1+i| = \sqrt{2}$.

. Soit θ, l'argument de $1+i$:

$$1+i = \sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

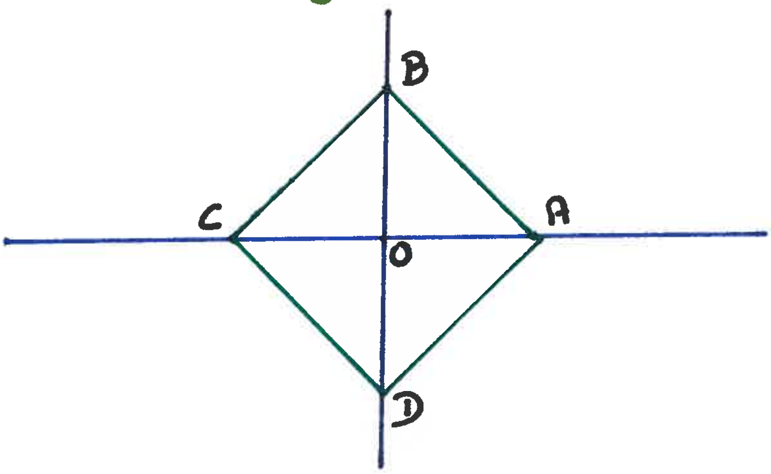
Par identification :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Au total, sous forme exponentielle : $1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

② Montrons qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD :

Étape 1 : Représentation graphique du carré ABCD.



Étape 2 : Réponse à la question posée.

Notons que la distance maximale entre le centre O et les côtés du cube est: 4.

En effet: la longueur OA = la longueur OB

= la longueur OC

= la longueur OD

= 4.

Ainsi, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD ssi: $OM_n > 4$.

$OM_n > 4 \Leftrightarrow |z_n| > 4 \Leftrightarrow |(1+i)^n| > 4 \Rightarrow (\sqrt{2})^n > 4$.

or: $(\sqrt{2})^n > 4 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^n > (\sqrt{2})^4 \Rightarrow n > 4$.

Au total, il existe bien un entier naturel $n_0 = 5$ tel que pour tout entier $n \geq 5$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD.