Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série S
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 3 (3 points)

(Commun à tous les candidats)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On considère le point A d'affixe 4, le point B d'affixe $4i$ et les points C et D tels que $ABCD$ est un carré de centre O.
Pour tout entier naturel non nul n, on appelle M_n le point d'affixe $z_n = (1+i)^n$.

1) Écrire le nombre $1+i$ sous forme exponentielle.

2) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, que l'on précisera, tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré $ABCD$.

EXERCICE 3 (Amérique du Nord 2016)

① Ecrivons le nombre $1+i$ sous forme exponentielle:

. Le module de $1+i$ est: $|1+i| = \sqrt{2}$.

. Soit θ, l'argument de $1+i$:

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

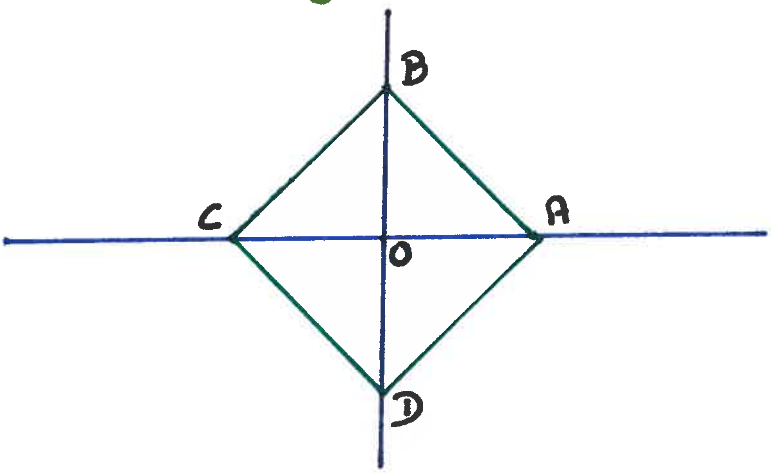
Par identification:

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Au total, sous forme exponentielle : $1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

② Montrons qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD:

Etape 1 : Représentation graphique du carré ABCD.



Etape 2 : Réponse à la question posée.

Notons que la distance maximale entre le centre O et les côtés du cube est : 4.

En effet : la longueur OA = la longueur OB

= la longueur OC

= la longueur OD

= 4.

Ainsi, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD ssi : $OM_n > 4$.

$OM_n > 4 \Leftrightarrow |z_n| > 4 \Leftrightarrow |(1+i)^n| > 4 \Rightarrow (\sqrt{2})^n > 4$.

or : $(\sqrt{2})^n > 4 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^n > (\sqrt{2})^4 \Rightarrow n > 4$.

Au total, il existe bien un entier naturel $n_0 = 5$ tel que pour tout entier $n \geq 5$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD.