Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

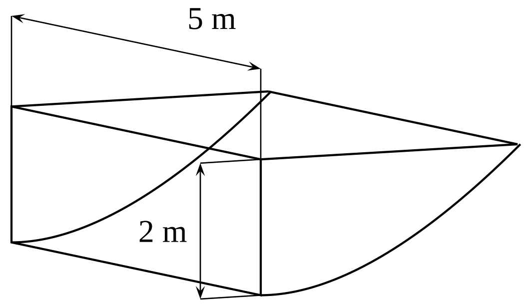
Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 2 (6 points)

(commun à tous les candidats)

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau.
Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant :

- elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long ;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.

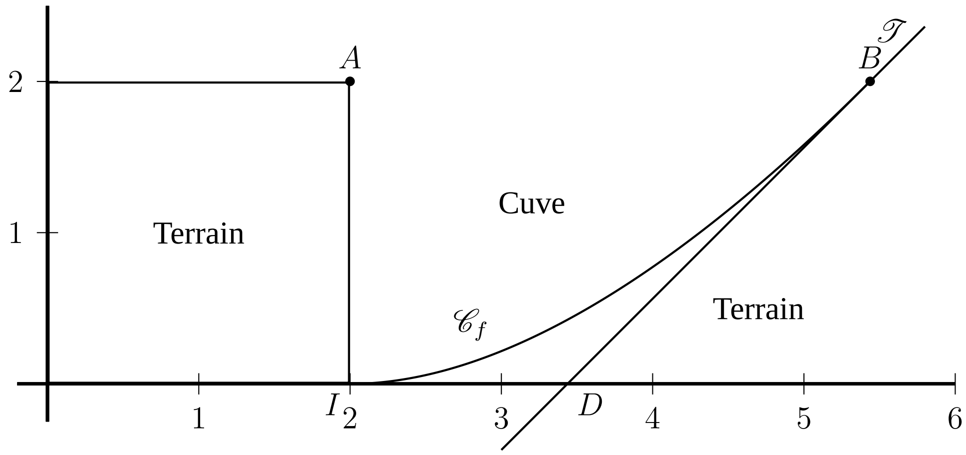


Cette cuve est schématisée ci-contre.

La partie incurvée est modélisée par la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[2\ ;\ 2e]$ définie par :

$$f(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé **d'unités 1 m** et constitue une vue de profil de la cuve.
On considère les points $A(2\ ;\ 2)$, $I(2\ ;\ 0)$ et $B(2e\ ;\ 2)$.



Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

1) Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_f$ et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I.

2) On note $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B, et D le point d'intersection de la droite $\mathscr{T}$ avec l'axe des abscisses.

a) Déterminer une équation de la droite $\mathscr{T}$ et en déduire les coordonnées de D.

b) On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, les droites d'équations $y = 2, x = 2$ et $x = 2e$.
S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze $AIDB$.
Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?

3) a) Montrer que, sur l'intervalle $[2\ ;\ 2e]$, la fonction G définie par

$$G(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$$

est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[2\ ;\ 2e]$.

c) Déterminer la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.

Partie B

Pour tout réel x compris entre 2 et $2e$, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.
On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2\ ;\ 2e]$,

$$v(x) = 5\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3\right].$$

1) Quel volume d'eau, au m^3 près, y a-t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre ?

2) On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.

On considère l'algorithme ci-contre.
Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher.

Variables :	a est un réel b est un réel

Traitement :	a prend la valeur 2
	b prend la valeur $2e$
	Tant que $v(b) - v(a) > 10^{-3}$ faire :
	    c prend la valeur $(a+b)/2$
	    Si $v(c) < V/2$, alors :
	        a prend la valeur c
	    Sinon
	        b prend la valeur c
	    Fin Si
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher $f(c)$

EXERCICE 2

[Amérique du Nord 2016]

Partie A:

1. a. Montrons que les points " B " et " I " appartiennent à la courbe Cf de f:

Ici: • $f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2$

• $Df = [2;2e]$

• $B = (2e;2)$ et $I(2;0)$.

• B appartient à la courbe représentative de f ssi: $2 = (2e)\ln\left(\frac{2e}{2}\right) - 2e + 2$.

Or: $(2e)\ln\left(\frac{2e}{2}\right) - 2e + 2 = (2e) \times (1) - 2e + 2$

<=> $(2e)\ln\left(\frac{2e}{2}\right) - 2e + 2 = 2$.

Donc oui: $B \in Cf$.

• I appartient à la courbe représentative de f ssi: $0 = (2)\ln\left(\frac{2}{2}\right) - 2 + 2$.

Or: $(2)\ln\left(\frac{2}{2}\right) - 2 + 2 = (2) \times \ln(1) - 2 + 2$

<=> $(2)\ln\left(\frac{2}{2}\right) - 2 + 2 = 0$.

Donc oui: $I \in Cf$.

Au total: " B " et " I " appartiennent bien à Cf.

I. b. Montrons que l'axe des abscisses est tangent à la courbe Cf au point I:

Cela est vérifié ssi: • $I \in Cf$

et: • la dérivée de f au point I est nulle, car dans ce cas l'équation de la tangente au point I est $y = 0$.

• **$I \in Cf$, d'après la question précédente.**

• **Calculons f':**

Posons: $f = f_1 \times f_2 + f_3$, avec: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ et $f_3(x) = -x + 2$.

f_1 et f_3 sont dérivables sur IR comme fonctions polynômes, donc dérivables sur $[2 ; 2e]$.

f_2 est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme fonction " ln ", donc dérivable sur $[2 ; 2e]$.

Par conséquent, $\mathbf{h} = f_1 \times f_2$ est dérivable sur $[2 ; 2e]$ comme produit de 2 fonctions dérivables sur $[2 ; 2e]$.

Enfin, f est dérivable sur $[2 ; 2e]$ comme somme $(\mathbf{h} + f_3)$ de 2 fonctions dérivables sur $[2 ; 2e]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [2 ; 2e]$.

Pour tout $x \in [2 ; 2e]$: $f'(x) = 1 \times \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \times \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 1$

$$\Rightarrow f'(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

Dans ces conditions, au point I $(2 ; 0)$: $f'(2) = 0$.

Donc la dérivée de f au point I est bien nulle.

Au total: l'axe des abscisses est bien tangent à la courbe Cf au point I.

2. a. Déterminons une équation de la droite T et les coordonnées du point D:

D'après l'énoncé:
- T est tangente à Cf au point $B(2e;2)$
- D est le point d'ntersection de T avec l'axe des abscisses.

Étape 1: on détermine l'équation de la tangente T.

Nous savons que:
- pour tout $x \in [2;2e]$, $f'(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$
- l'équation de T est: $y - y_B = f'(B)\,(x - x_B)$.

D'où, l'équation de la droite T est: $y - 2 = f'(2e)\,(x - 2e) \Rightarrow y = x - 2e + 2$.

Ainsi, l'équation de la droite T est: $y = x - 2e + 2$.

Étape 2: on détermine les coordonnées du point D.

Comme D est sur l'axe des abscisses: $y_D = 0$.

Dans ces conditions, nous avons:

$$y = x - 2e + 2 \iff 0 = x - 2e + 2 \Rightarrow x_D = 2e - 2.$$

Ainsi, le point D est tel que: $D(2e - 2;0)$.

2. b. Déterminons un encadrement du volume de la cuve:

- S est encadrée par:
  - l'aire du triangle ABI
  - l'aire du trapèze AIDB.

Or: • l'aire du triangle ABI, qui est rectangle en A, est: $\mathcal{A}1 = \frac{1}{2}[AI \times AB]$,

• l'aire du trapèze AIDB est: $\mathcal{A}2 = \frac{1}{2}(ID + AB) \times AI$.

Nous obtenons ainsi: $\mathcal{A}1 = (2e - 2)m^2$ et $\mathcal{A}2 = (4e - 6)m^2$.

En conclusion, S est telle que: $\mathcal{A}1 < S < \mathcal{A}2$ ou encore: $2e - 2 < S < 4e - 6$.

• Nous savons que la longueur de la cuve est de 5 mètres.

Dans ces conditions, le volume V de la cuve est tel que: $5(2e - 2) < V < 5(4e - 6)$

cad: $17,18 < V < 24,37$.

Ainsi, le volume V de la cuve est compris entre: $17,18\ m^3$ et $24,37\ m^3$.

3. a. Montrons que G est une primitive de g:

$G(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$, et: $g(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

Ici: g est continue sur $[2;2e]$. Elle admet donc une primitive G dérivable sur l'intervalle $[2;2e]$ et G est telle que: $G' = g$.

Pour tout $x \in [2;2e]$: $G'(x) = \left(\frac{2x}{2}\right)\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{2}$

$$\Leftrightarrow G'(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} - \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow G'(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

Au total, on a bien pour tout $x \in [2;2e]$: G est une primitive de g car $G' = g$.

3. b. Déduisons-en une primitive F de f sur $[2;2e]$:

Nous remarquons que: $f(x) = g(x) - x + 2$, pour tout $x \in [2;2e]$.

Dans ces conditions, nous avons, pour tout $x \in [2;2e]$:

$$F(x) = G(x) + \int(-x+2)dx$$

$$\iff F(x) = G(x) + \left[\frac{-x^2}{2} + 2x\right]$$

$$\iff F(x) = \left(\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) \frac{-x^2}{4}\right) + \left(\frac{-x^2}{2} + 2x\right)$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3x^2}{4} + 2x.$$

Au total, une primitive F de f sur $[2;2e]$ est: $F(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3}{4}x^2 + 2x.$

3. c. c1. Déterminons la valeur exacte de S:

$$S = AB \times AI - \int_2^{2e} f(x)dx \iff S = (2e-2) \times 2 - \int_2^{2e} f(x)dx$$

$$\iff S = (4e-4) - \left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3}{4}x^2 + 2x\right]_2^{2e}$$

$$\Rightarrow S = (e^2 - 3)m^2.$$

Au total, la valeur exacte de S est: $(e^2 - 3)m^2$.

3. c. c2. Déduisons-en une valeur approchée du volume V:

Nous savons que la longueur de la cuve est de 5 mètres.

Dans ces conditions: $V = 5 \times (e^2 - 3)$

$$\Rightarrow V \approx 22m^3, \text{ au } m^3 \text{ près.}$$

Au total, une valeur approchée du volume V est: $V \approx 22m^3$, au m^3 près.

Partie B:

1. Déterminons le volume d'eau demandé:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

Il s'agit de déterminer $V(x)$ quand $f(x) = 1$.

Par tâtonnement et à l'aide d'une machine à calculer:

$f(\alpha) = 1$ quand $\alpha \in [4,31 ; 4,32]$.

Dans ces conditions, et d'après le théorème des valeurs intermédiaires:

$V(4,31) \leqslant V(\alpha) \leqslant V(4,32) \iff 7,44 \leqslant V(x) \leqslant 7,53.$

En conclusion, le volume d'eau demandé est: $7\,m^3$, au m^3 près.

2. Interprétons le résultat de l'algorithme:

L'algorithme permet d'afficher la hauteur d'eau dans la cuve lorsque cette dernière est à moitié remplie.