Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série S
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6 dont une annexe en page 6/6 qui est à rendre avec la copie.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 3 (4 points)

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat de 100 grammes. Le service de contrôle qualité effectue plusieurs types de contrôle.

Partie A Contrôle avant la mise sur le marché

Une tablette de chocolat doit peser 100 grammes avec une tolérance de deux grammes en plus ou en moins. Elle est donc mise sur le marché si sa masse est comprise entre 98 et 102 grammes.
La masse (exprimée en grammes) d'une tablette de chocolat peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$. Le réglage des machines de la chaîne de fabrication permet de modifier la valeur de σ.

1. Calculer la probabilité de l'événement M : « la tablette est mise sur le marché ».
2. On souhaite modifier le réglage des machines de telle sorte que la probabilité de cet événement atteigne 0,97.

   Déterminer la valeur de σ pour que la probabilité de l'événement « la tablette est mise sur le marché » soit égale à 0,97.

Partie B Contrôle à la réception

Le service contrôle la qualité des fèves de cacao livrées par les producteurs. Un des critères de qualité est le taux d'humidité qui doit être de 7 %. On dit alors que la fève est conforme.
L'entreprise a trois fournisseurs différents : le premier fournisseur procure la moitié du stock de fèves, le deuxième 30 % et le dernier apporte 20 % du stock.
Pour le premier, 98 % de sa production respecte le taux d'humidité ; pour le deuxième, qui est un peu moins cher, 90 % de sa production est conforme, et le troisième fournit 20 % de fèves non conformes. On choisit au hasard une fève dans le stock reçu. On note F_i l'événement « la fève provient du fournisseur i », pour i prenant les valeurs 1, 2 ou 3, et C l'événement « la fève est conforme ».

1. Déterminer la probabilité que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme. Le résultat sera arrondi à 10^{-2}.
2. Le troisième fournisseur ayant la plus forte proportion de fèves non conformes, l'entreprise décide de ne conserver que les fournisseurs 1 et 2. De plus, elle souhaite que 92 % de fèves qu'elle achète soient conformes. Quelle proportion p de fèves doit-elle acheter au fournisseur 1 pour atteindre cet objectif ?

EXERCICE 3

[Amérique du Nord 2015]

Partie A: Poids d'une tablette de chocolat

1. Calculons P (M):

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X est une variable aléatoire qui correspond à la masse d'une tablette de chocolat (en grammes).
- X suit la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart type $\sigma = 1$.
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de calculer: $P(98 \leqslant X \leqslant 102)$.

(mise sur le marché ssi: $x \in [98 ; 102]$)

Nous remarquons que: $98 = \mu - 2\sigma$ et $102 = \mu + 2\sigma$.

Or, d'après le cours: $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.

D'où: $P(98 \leqslant X \leqslant 102) \approx 0,954$.

Au total, la probabilité que la tablette soit mise sur le marché est de: 95, 4%.

2. Déterminons σ tel que $P(M) = 0,97$:

$P(M) = 0,97 \iff P(98 \leqslant X \leqslant 102) = 0,97$

$$\iff P\left(\frac{98-100}{\sigma} \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{102-100}{\sigma}\right) = 0,97$$

$$\iff P\left(-\frac{2}{\sigma} \leqslant T \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) = 0,97$$

$$\iff 2 \times P\left(T \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) - 1 = 0,97$$

$$\Rightarrow P\left(T \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) = 0,985.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{2}{\sigma} \approx 2,17 \Rightarrow \sigma \approx 0,921.$$

Au total, la valeur de σ est: $\sigma \approx 0,921.$

freemaths.fr

EXERCICE 3

[Amérique du Nord 2015]

Partie B: La fève

1. Déterminons la probabilité que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme:

D'après l'énoncé, nous avons:

- F_i = " la fève provient du fournisseur i ".
- C = " la fève est conforme ".
- $\overline{C}$ = " la fève n'est pas conforme ".

- $P(F_1) = 0.5$
- $P(F_2) = 0.3$
- $P(F_3) = 0.2$

$(0.5 + 0.3 + 0.2 = 1)$.

- $P_{F_1}(C) = 98\%$
- $P_{F_1}(\overline{C}) = 2\%$

$(98\% + 2\% = 1)$.

- $P_{F_2}(C) = 90\%$
- $P_{F_2}(\overline{C}) = 10\%$

$(90\% + 10\% = 1)$.

- $P_{F_3}(C) = 80\%$
- $P_{F_3}(\overline{C}) = 20\%$

$(80\% + 20\% = 1)$.

Ici, il s'agit de calculer: $P_C(F_1)$.

$$P_C(F_1) = \frac{P(C \cap F_1)}{P(C)} \iff P_C(F_1) = \frac{P_{F_1}(C) \times P(F_1)}{P(C)}.$$

Or: $P_{F_1}(C) = 98\%$, $P(F_1) = 0.5$ et $P(C) = ?$

Calculons la probabilité de l'événement C.

L'événement $C = (C \cap F_1) \cup (C \cap F_2) \cup (C \cap F_3)$.

D'où: $P(C) = P(C \cap F_1) + P(C \cap F_2) + P(C \cap F_3)$

$$= P_{F_1}(C) \times P(F_1) + P_{F_2}(C) \times P(F_2) + P_{F_3}(C) \times P(F_3).$$

Ainsi: $P(C) = 92\%$.

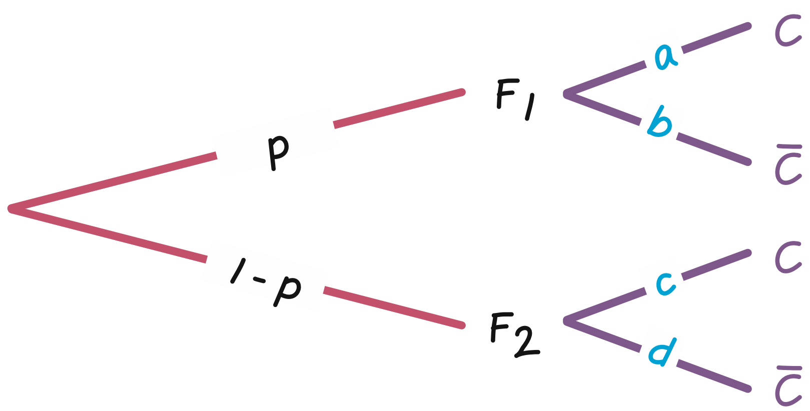
En conclusion: $P_C(F_1) = \frac{98\% \times 0.5}{92\%}$

$\Rightarrow P_C(F_1) = 53\%$.

Au total, il y a 53% de chance pour que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme.

2. Déterminons la proportion de fèves que l'entreprise doit acheter au fournisseur 1 pour que 92% des fèves soient conformes:

Dans ces conditions, nous avons l'arbre pondéré suivant:



, avec:

- $a = 98\%$
- $b = 2\%$
- $c = 90\%$
- $d = 10\%$

L'événement $C = (C \cap F_1) \cup (C \cap F_2)$.

D'où : $P(C) = P(C \cap F_1) + P(C \cap F_2)$

$$= P_{F_1}(C) \times P(F_1) + P_{F_2}(C) \times P(F_2).$$

Soit " p ", la proportion de fèves que l'entreprise doit acheter au fournisseur 1.

Ainsi : $P(C) = 98\% \times p + 90\% \times (1 - p)$

$$= 8\% \times p + 90\%. \ (a)$$

Or : $P(C) = 92\%$, d'où : (a) $\iff 92 = 8 \times p + 90$

$$\Rightarrow p = 25\%.$$

Au total, l'entreprise doit acheter 25% des fèves au fournisseur 1 (et 75% au fournisseur 2) pour que 92% des fèves soient conformes.