EXERCICE 3

[Amérique du Nord 2015]

Partie A: Poids d'une tablette de chocolat

1. Calculons P (M):

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X est une variable aléatoire qui correspond à la masse d'une tablette de chocolat (en grammes).
- X suit la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart type $\sigma = 1$.
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de calculer: $P(98 \leqslant X \leqslant 102)$.

(mise sur le marché ssi: $x \in [98 ; 102]$)

Nous remarquons que: $98 = \mu - 2\sigma$ et $102 = \mu + 2\sigma$.

Or, d'après le cours: $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.

D'où: $P(98 \leqslant X \leqslant 102) \approx 0,954$.

Au total, la probabilité que la tablette soit mise sur le marché est de: 95, 4%.

2. Déterminons σ tel que P (M) = 0, 97:

$P(M) = 0,97 \iff P(98 \leqslant X \leqslant 102) = 0,97$

$$\iff P\left(\frac{98-100}{\sigma} \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{102-100}{\sigma}\right) = 0,97$$

$$\iff P\left(-\frac{2}{\sigma} \leqslant T \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) = 0,97$$

$$\iff 2 \times P\left(T \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) - 1 = 0,97$$

$$\implies P\left(T \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) = 0,985.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{2}{\sigma} \approx 2,17 \implies \sigma \approx 0,921.$$

Au total, la valeur de σ est: $\sigma \approx 0,921.$

EXERCICE 3

[Amérique du Nord 2015]

Partie B: La fève

1. Déterminons la probabilité que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme:

D'après l'énoncé, nous avons:

- F_i = " la fève provient du fournisseur i ".
- C = " la fève est conforme ".
- $\bar{C}$ = " la fève n'est pas conforme ".

- $P(F_1) = 0.5$
- $P(F_2) = 0.3$
- $P(F_3) = 0.2$

$(0.5 + 0.3 + 0.2 = 1)$.

- $P_{F_1}(C) = 98\%$
- $P_{F_1}(\bar{C}) = 2\%$

$(98\% + 2\% = 1)$.

- $P_{F_2}(C) = 90\%$
- $P_{F_2}(\bar{C}) = 10\%$

$(90\% + 10\% = 1)$.

- $P_{F_3}(C) = 80\%$
- $P_{F_3}(\bar{C}) = 20\%$

$(80\% + 20\% = 1)$.

Ici, il s'agit de calculer: $P_C(F_1)$.

$$P_C(F_1) = \frac{P(C \cap F_1)}{P(C)} \iff P_C(F_1) = \frac{P_{F_1}(C) \times P(F_1)}{P(C)}.$$

Or: $P_{F_1}(C) = 98\%$, $P(F_1) = 0.5$ et $P(C) = ?$

Calculons la probabilité de l'événement C.

L'événement $C = (C \cap F_1) \cup (C \cap F_2) \cup (C \cap F_3)$.

D'où: $P(C) = P(C \cap F_1) + P(C \cap F_2) + P(C \cap F_3)$

$$= P_{F_1}(C) \times P(F_1) + P_{F_2}(C) \times P(F_2) + P_{F_3}(C) \times P(F_3).$$

Ainsi: $P(C) = 92\%$.

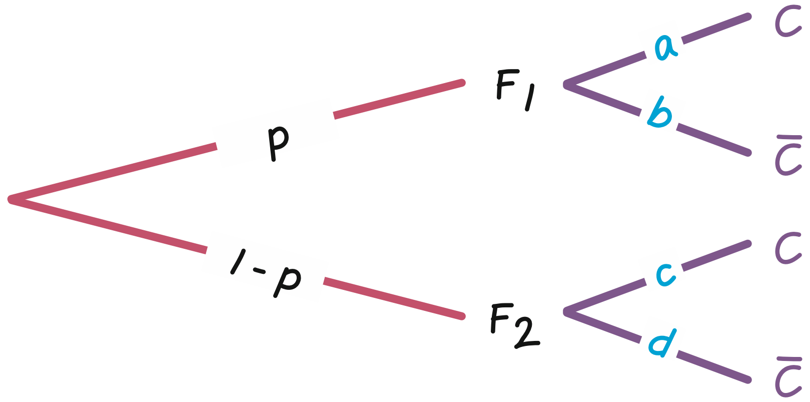
En conclusion: $P_C(F_1) = \frac{98\% \times 0.5}{92\%}$

$\Rightarrow P_C(F_1) = 53\%$.

Au total, il y a 53% de chance pour que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme.

2. Déterminons la proportion de fèves que l'entreprise doit acheter au fournisseur 1 pour que 92% des fèves soient conformes:

Dans ces conditions, nous avons l'arbre pondéré suivant:



, avec:
- $a = 98\%$
- $b = 2\%$
- $c = 90\%$
- $d = 10\%$

L'événement $C = (C \cap F_1) \cup (C \cap F_2)$.

D'où: $P(C) = P(C \cap F_1) + P(C \cap F_2)$

$$= P_{F_1}(C) \times P(F_1) + P_{F_2}(C) \times P(F_2).$$

Soit " p ", la proportion de fèves que l'entreprise doit acheter au fournisseur 1.

Ainsi: $P(C) = 98\% \times p + 90\% \times (1 - p)$

$$= 8\% \times p + 90\%. \quad (a)$$

Or: $P(C) = 92\%$, d'où: $(a) \iff 92 = 8 \times p + 90$

$$\Rightarrow p = 25\%.$$

Au total, l'entreprise doit acheter 25% des fèves au fournisseur 1 (et 75% au fournisseur 2) pour que 92% des fèves soient conformes.