Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7 dont deux annexes en pages 6/7 et 7/7 qui sont à rendre avec la copie.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n, on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $(x_n\,;\,y_n)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases} \quad \text{et pour tout entier naturel } n : \begin{cases} x_{n+1} = 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} = 0,6x_n + 0,8y_n \end{cases}$$

1. **a)** Déterminer les coordonnées des points A_0, A_1 et A_2.

b) Pour construire les points A_n ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

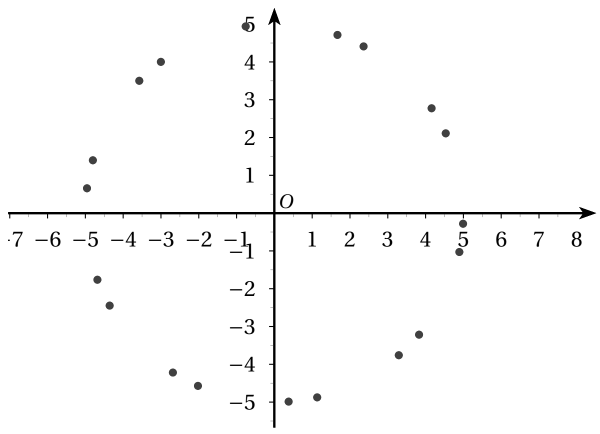
Variables :
i, x, y, t : nombres réels

Initialisation :
x prend la valeur -3
y prend la valeur 4

Traitement :
Pour i allant de 0 à 20
  Construire le point de coordonnées $(x; y)$
  t prend la valeur x
  x prend la valeur ....
  y prend la valeur ....
Fin Pour

Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points A_0 à A_{20}.

c) À l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant :



Identifier les points A_0, A_1 et A_2. On les nommera sur la figure jointe en **annexe 2**, **(à rendre avec la copie)**.

Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points A_n pour tout n entier naturel ?

2. Le but de cette question est de construire géométriquement les points A_n pour tout n entier naturel.

Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel n, $z_n = x_n + \mathrm{i}\, y_n$ l'affixe du point A_n.

a) Soit $u_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

b) On admet qu'il existe un réel θ tel que $\cos\theta = 0,8$ et $\sin\theta = 0,6$.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_n = z_{n+1}$.

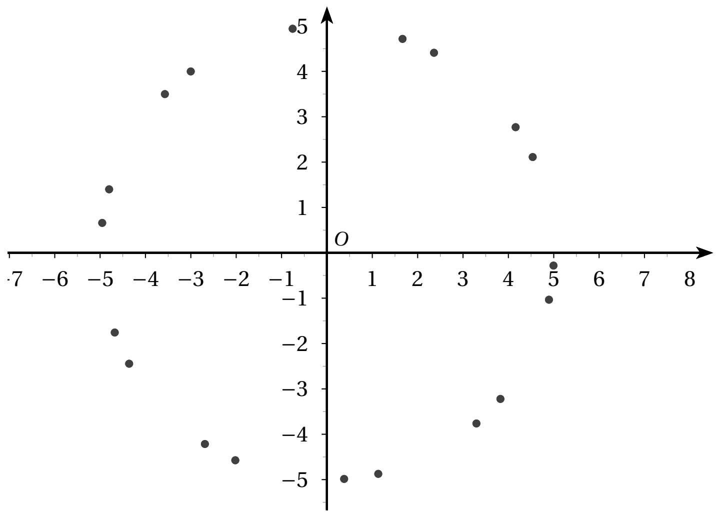
c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} z_0$.

d) Montrer que $\theta + \dfrac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0.

e) Pour tout entier naturel n, déterminer, en fonction de n et θ, un argument du nombre complexe z_n. Représenter θ sur la figure jointe en **annexe 2**, **(à rendre avec la copie)**.

Expliquer, pour tout entier naturel n, comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n.

Annexe 2 (Exercice 2)



EXERCICE 2 (Amérique du Nord 2015)

① ⓐ Déterminons les coordonnées des points A_0, A_1 et A_2 :

Nous avons : $\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}8x_n - 0{,}6y_n \\ y_{n+1} = 0{,}6x_n + 0{,}8y_n \end{cases}$ et $\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases}$.

Dans ces conditions :

- $A_0(-3\,;4)$
- $A_1(0{,}8\times -3 - 0{,}6\times 4\,;\ 0{,}6\times -3 + 0{,}8\times 4)$ cad $A_1(-4{,}8\,;1{,}4)$
- $A_2(0{,}8\times -4{,}8 - 0{,}6\times 1{,}4\,;\ 0{,}6\times -4{,}8 + 0{,}8\times 1{,}4)$

  cad $A_2(-4{,}68\,;-1{,}76)$.

Au total : $A_0(-3\,;4)$, $A_1(-4{,}8\,;1{,}4)$ et $A_2(-4{,}68\,;-1{,}76)$.

ⓑ Complétons l'algorithme pour qu'il construise les points A_0 à A_{20} :

⋮

Traitement :

Pour i allant de 0 à 20

  Construire le point de coordonnées $(x\,;y)$

  t prend la valeur x

  x prend la valeur $0{,}8\times x - 0{,}6\times y$

  y prend la valeur $0{,}6\times t + 0{,}8\times y$

Fin Pour

ⓒ Identifions les points A_0, A_1 et A_2 :

Voir dernière page de ce corrigé.

Notons que tous les points semblent être sur un cercle de centre O et de rayon $R = 5$.

② ⓐ Montrons que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5$:

Ayons recours à une démonstration par récurrence.

Initialisation :

. $u_0 = |z_0| \Leftrightarrow u_0 = |-3+4i| \Leftrightarrow u_0 = 5$, vrai.

. $u_1 = |z_1| \Leftrightarrow u_1 = |-4,8+1,4i| \Leftrightarrow u_1 = 5$, vrai.

Hérédité : Supposons que pour tout entier naturel n, $u_n = 5$ et montrons qu'alors : $u_{n+1} = 5$.

Supposons : $u_n = 5$.

Dans ces conditions : $u_{n+1} = |z_{n+1}|$

$$\Rightarrow u_{n+1} = |(0,8x_n - 0,6y_n) + i(0,6x_n + 0,8y_n)|$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \left((0,8x_n - 0,6y_n)^2 + (0,6x_n + 0,8y_n)^2\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow (u_{n+1})^2 = 0,64x_n^2 + 0,36y_n^2 - 0,96x_ny_n + 0,36x_n^2 + 0,64y_n^2 + 0,96x_ny_n$$

$$\Rightarrow (u_{n+1})^2 = x_n^2 + y_n^2$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = (x_n^2 + y_n^2)^{1/2}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = |z_n|$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = u_n$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = 5.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, nous avons : $U_n = 5$.

Une interprétation géométrique est que tous les points A_i sont situés sur : le même cercle de centre O et de rayon $R = 5$ $(U_n = 5 = |z_n| = OA_n)$.

ⓑ Montrons que, pour tout entier n, $e^{i\theta} z_n = z_{n+1}$:

• $z_{n+1} = x_{n+1} + i y_{n+1} \Rightarrow z_{n+1} = (0{,}8x_n - 0{,}6y_n) + i(0{,}6x_n + 0{,}8y_n)$.

• $e^{i\theta} z_n = (\cos\theta + i\sin\theta)(x_n + iy_n)$

$= (0{,}8 + 0{,}6i)(x_n + iy_n)$

$= 0{,}8x_n + i\,0{,}8y_n + i\,0{,}6x_n - 0{,}6y_n$

$\Rightarrow e^{i\theta} z_n = (0{,}8x_n - 0{,}6y_n) + i(0{,}6x_n + 0{,}8y_n)$.

Au total : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{i\theta} z_n = z_{n+1}$.

ⓒ Démontrons que, pour tout entier naturel n, $z_n = e^{in\theta} z_0$:

Nous savons que : $z_{n+1} = e^{i\theta} z_n$.

Ainsi : (z_n) est une suite géométrique de raison $q = e^{i\theta}$ et de premier terme $z_0 = -3+4i$.

Dans ces conditions, nous pouvons écrire : $z_n = e^{in\theta} z_0$.

Au total : $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = e^{in\theta} z_0$.

ⓓ Montrons que $\theta + \pi/2$ est un argument de z_0 :

Nous savons que : $z_0 = -3+4i$.

Or, le module de z_0 est : $r_0 = 5$.

Ainsi, nous pouvons écrire : $z_0 = 5\left(-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)$

$$= 5(-0{,}6 + 0{,}8i)$$

$$= 5i(0{,}6i + 0{,}8)$$

$$= 5i(0{,}8 + 0{,}6i)$$

$$\Rightarrow z_0 = 5i(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Or, $5i = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 5i = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Dans ces conditions : $z_0 = 5e^{i\frac{\pi}{2}} \times (\cos\theta + i\sin\theta)$

$$= 5e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow z_0 = 5e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}.$$

Au total : z_0 a pour module $r_0 = 5$ et pour argument $\frac{\pi}{2} + \theta$.

ⓐ. Déterminons, en fonction de n et θ, un argument de z_n :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ z_n = e^{in\theta} z_0 \\ \bullet\ z_0 = 5e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} \end{array}\right\} \Rightarrow z_n = 5e^{in\theta}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}.$$

Ainsi : $z_n = 5e^{i\left(\frac{\pi}{2}+(n+1)\theta\right)}$.

Au total : un argument de z_n est donc $\frac{\pi}{2} + (n+1)\theta$.

- **Représentons θ sur la figure :**

Voir dernière page de ce corrigé.

- **Explication :**

Pour construire A_{n+1} à partir de A_n, il suffit d'effectuer : une rotation de centre O et d'angle θ, et ce, tout autour du cercle de centre O et de rayon $R = 5$.

Annexe 2 (Exercice 2)