EXERCICE 2 (Amérique du Nord 2015)

① ⓐ Déterminons les coordonnées des points A_0, A_1 et A_2 :

Nous avons : $\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}8x_n - 0{,}6y_n \\ y_{n+1} = 0{,}6x_n + 0{,}8y_n \end{cases}$ et $\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases}$.

Dans ces conditions :

- $A_0(-3;4)$
- $A_1(0{,}8\times -3 - 0{,}6\times 4\ ;\ 0{,}6\times -3 + 0{,}8\times 4)$ c.à.d $A_1(-4{,}8;1{,}4)$
- $A_2(0{,}8\times -4{,}8 - 0{,}6\times 1{,}4\ ;\ 0{,}6\times -4{,}8 + 0{,}8\times 1{,}4)$

  c.à.d $A_2(-4{,}68;-1{,}76)$.

Au total : $A_0(-3;4)$, $A_1(-4{,}8;1{,}4)$ et $A_2(-4{,}68;-1{,}76)$.

ⓑ Complétons l'algorithme pour qu'il construise les points A_0 à A_{20} :

⋮

Traitement :

Pour i allant de 0 à 20

  Construire le point de coordonnées $(x;y)$

  t prend la valeur x

  x prend la valeur $0{,}8\times x - 0{,}6\times y$

  y prend la valeur $0{,}6\times t + 0{,}8\times y$

Fin Pour

ⓒ Identifions les points A_0, A_1 et A_2 :

Voir dernière page de ce corrigé.

Notons que tous les points semblent être sur un cercle de centre O et de rayon $R = 5$.

② ⓐ Montrons que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5$:

Ayons recours à une démonstration par récurrence.

Initialisation :

. $u_0 = |z_0| \Leftrightarrow u_0 = |-3+4i| \Leftrightarrow u_0 = 5$, vrai.

. $u_1 = |z_1| \Leftrightarrow u_1 = |-4{,}8+1{,}4i| \Leftrightarrow u_1 = 5$, vrai.

Hérédité : Supposons que pour tout entier naturel n, $u_n = 5$ et montrons qu'alors : $u_{n+1} = 5$.

Supposons : $u_n = 5$.

Dans ces conditions : $u_{n+1} = |z_{n+1}|$

$$\Rightarrow u_{n+1} = |(0{,}8x_n - 0{,}6y_n) + i(0{,}6x_n + 0{,}8y_n)|$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \left((0{,}8x_n - 0{,}6y_n)^2 + (0{,}6x_n + 0{,}8y_n)^2\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow (u_{n+1})^2 = 0{,}64x_n^2 + 0{,}36y_n^2 - 0{,}96x_ny_n + 0{,}36x_n^2 + 0{,}64y_n^2 + 0{,}96x_ny_n$$

$$\Rightarrow (u_{n+1})^2 = x_n^2 + y_n^2$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = (x_n^2 + y_n^2)^{1/2}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = |z_n|$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = u_n$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = 5.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, nous avons : $U_n = 5$.

Une interprétation géométrique est que tous les points A_i sont situés sur : le même cercle de centre O et de rayon $R = 5$ $(U_n = 5 = |z_n| = OA_n)$.

ⓑ Montrons que, pour tout entier n, $e^{i\theta} z_n = z_{n+1}$:

• $z_{n+1} = x_{n+1} + i y_{n+1} \Rightarrow z_{n+1} = (0{,}8x_n - 0{,}6y_n) + i(0{,}6x_n + 0{,}8y_n)$.

• $e^{i\theta} z_n = (\cos\theta + i\sin\theta)(x_n + iy_n)$

$= (0{,}8 + 0{,}6i)(x_n + iy_n)$

$= 0{,}8x_n + i\,0{,}8y_n + i\,0{,}6x_n - 0{,}6y_n$

$\Rightarrow e^{i\theta} z_n = (0{,}8x_n - 0{,}6y_n) + i(0{,}6x_n + 0{,}8y_n)$.

Au total : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{i\theta} z_n = z_{n+1}$.

ⓒ Démontrons que, pour tout entier naturel n, $z_n = e^{in\theta} z_0$:

Nous savons que : $z_{n+1} = e^{i\theta} z_n$.

Ainsi : (z_n) est une suite géométrique de raison $q = e^{i\theta}$ et de premier terme $z_0 = -3+4i$.

Dans ces conditions, nous pouvons écrire : $z_n = e^{in\theta} z_0$.

Au total : $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = e^{in\theta} z_0$.

ⓓ Montrons que $\theta + \pi/2$ est un argument de z_0 :

Nous savons que : $z_0 = -3+4i$.

Or, le module de z_0 est : $r_0 = 5$.

Ainsi, nous pouvons écrire : $z_0 = 5\left(-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)$

$$= 5(-0{,}6 + 0{,}8i)$$

$$= 5i\,(0{,}6\,i + 0{,}8)$$

$$= 5i\,(0{,}8 + 0{,}6i)$$

$$\Rightarrow \underline{z_0 = 5i\,(\cos\theta + i\sin\theta)}.$$

Or, $5i = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 5i = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Dans ces conditions : $z_0 = 5e^{i\frac{\pi}{2}} \times (\cos\theta + i\sin\theta)$

$$= 5e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow \underline{z_0 = 5e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}}.$$

Au total : z_0 a pour module $r_0 = 5$ et pour argument $\frac{\pi}{2} + \theta$.

ⓐ. Déterminons, en fonction de n et θ, un argument de z_n :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ z_n = e^{in\theta} z_0 \\ \bullet\ z_0 = 5e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} \end{array}\right\} \Longrightarrow z_n = 5e^{in\theta}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}.$$

Ainsi : $\underline{z_n = 5e^{i\left(\frac{\pi}{2} + (n+1)\theta\right)}}$.

Au total : un argument de z_n est donc $\frac{\pi}{2} + (n+1)\theta$.

- Représentons θ sur la figure :

Voir dernière page de ce corrigé.

- Explication :

Pour construire A_{n+1} à partir de A_n, il suffit d'effectuer : une rotation de centre O et d'angle θ, et ce, tout autour du cercle de centre O et de rayon $R = 5$.

Annexe 2 (Exercice 2)