

# Corrigé

## Exercice 4



---

---

freemaths.fr

---

---

# LES MATHÉMATIQUES

## AU BACCALAURÉAT ES

### FONCTIONS ET INTÉGRALES, BAC ES

- Fonctions
- Domaine de définition
- Dérivées:  $f'$  et  $f''$
- Sens de variation d'une fonction
- Fonction croissante, fonction décroissante
- Tableau des variations d'une fonction
- Fonction concave, fonction convexe
- Point d'inflexion
- Équation d'une tangente
- Primitives
- Intégrales
- Valeur moyenne
- Calcul d'une aire
- Corollaire des valeurs intermédiaires (TVI)

# EXERCICE 4

[ Polynésie 2019 ]

## Partie A:

1. Calculons  $f'$ , pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[1; 9]$ :

Ici: •  $f(x) = 0,5x^2 - 7x + 14 + 6\ln x$

•  $Df = [1; 9]$ .

D'après l'énoncé,  $f$  est dérivable sur  $[1; 9]$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $f'$  pour tout  $x \in [1; 9]$ .

Pour tout  $x \in [1; 9]$ :  $f'(x) = x - 7 + \frac{6}{x}$  cad:  $f'(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x}$ .

Au total, pour tout  $x \in [1; 9]$ , nous avons bien:  $f'(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x}$ .

2. a. Etudions les variations de  $f$  sur l'intervalle  $[1; 9]$ :

Préalablement, résolvons l'équation:  $x^2 - 7x + 6 = 0$ , pour tout  $x \in [1; 9]$  (1).

$\Delta = 49 - 4 \times 1 \times 6$  cad:  $\Delta = 25 = (5)^2 > 0$ .

Comme  $\Delta > 0$ , l'équation (1) admet 2 solutions:

•  $x_1 = \frac{7-5}{2}$  cad:  $x_1 = 1$ ,

$$\bullet x_2 = \frac{7+5}{2} \text{ cad: } x_2 = 6.$$

Nous allons distinguer 2 cas pour tout  $x \in [1; 9]$ :

$$\bullet 1^{\text{er}} \text{ cas: } f'(x) \leq 0.$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ ssi } x^2 - 7x + 6 \leq 0 \text{ cad ssi: } x \in [1; 6].$$

$$\bullet 2^{\text{ème}} \text{ cas: } f'(x) \geq 0.$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } x^2 - 7x + 6 \geq 0 \text{ cad ssi: } x \in [6; 9].$$

Au total:  $\bullet f$  est décroissante sur  $[1; 6]$ ,

$\bullet f$  est croissante sur  $[6; 9]$ .

Nous pouvons donc dresser le tableau des variations suivant:

$x$	1	6	9	
$f'$	0	-	0	+
$f$	$a$	$b$	$c$	

Avec:  $\bullet a = 7,5,$

$$\bullet b = -10 + 6 \ln(6),$$

$$\bullet c = -8,5 + 6 \ln(10).$$

2. b. Justifions que, sur l'intervalle  $[1; 9]$ , l'équation  $f(x) = 5$  admet une unique solution  $\alpha$ :

Nous allons appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ .

Pour tout réel " $K$ " compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel " $c$ " de  $[a; b]$  tel que:  $f(c) = K$ .

Cela signifie que: l'équation  $f(x) = K$  admet au moins une solution appartenant à  $[a; b]$ .

- Si de plus, la fonction  $f$  est strictement "croissante" ou "décroissante" sur  $[a; b]$ , l'équation  $f(x) = K$  admet une **unique** solution appartenant à  $[a; b]$ .

Ici: •  $f$  est continue sur  $]1; 9[$ , donc sur  $]1; 6[$ .

- " $k = 5$ " est compris entre:  $f(6) = -10 + 6 \ln(6) < 5$

$$\text{et: } f(1) = 7,5 > 5.$$

- $f$  est strictement décroissante sur  $]1; 6[$ .

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation  $f(x) = 5$  ( $k = 5$ ) admet une **unique** solution  $\alpha$  appartenant à l'intervalle  $]1; 6[$ .

**Au total:**  $f(x) = 5$  admet exactement une solution unique  $\alpha$  sur  $]1; 6[$ .

2. c. Donnons un encadrement au centième près de  $\alpha$ :

A l'aide d'une machine à calculer, nous pouvons dire que:

$$2,55 \leq \alpha \leq 2,56.$$

Au total, un encadrement au centième près de  $\alpha$  est:

$$2,55 \leq \alpha \leq 2,56.$$

2. d. Déterminons la valeur numérique que contient la variable  $X$  à la fin de l'exécution de l'algorithme:

A la fin de l'exécution de l'algorithme:  $X = 2,56$ .

Ainsi, la valeur numérique que contient  $X$  à la fin de l'exécution est: 2,56.

3. Déterminons la quantité de pneus pour que le coût moyen de fabrication d'un pneu soit minimal:

D'après l'énoncé la fonction  $f$  modélise le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu (en centaines d'euros), pour  $x$  centaines de pneus produits.

Dans ces conditions, le coût moyen annuel est minimal quand  $f$  est minimale cad quand  $f$  atteint son minimum.

Or  $f$  atteint son minimum quand:  $x = 6$ , d'après le tableau des variations.

Et dans ce cas:  $f(6) \approx 0,75$ .

Ainsi: • le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu est minimal quand l'entreprise fabrique  $6 \times 100 = 600$  pneus;

• et, ce coût minimum par pneu est égal à  $f(6) \times 100 \approx 0,75$  €.

## Partie B:

1. Donnons une primitive  $G$  de la fonction  $g$  sur  $[0; 100]$ :

Ici: •  $g(x) = 2x - 1 + e^{0,05x}$

•  $Dg = [0; 100]$ .

Dans ces conditions, une primitive  $G$  de  $g$  sur  $[0; 100]$  est:

$$G(x) = x^2 - x + \frac{1}{0,05} e^{0,05x}.$$

Ainsi sur  $[0; 100]$ :  $G(x) = x^2 - x + \frac{1}{0,05} e^{0,05x}.$

2. Calculons la valeur moyenne de la fonction  $g$  sur  $[0; 100]$ :

D'après le cours, la valeur moyenne  $m$  de  $g$  sur  $[0; 100]$  est telle que:

$$m = \frac{1}{100 - 0} \int_0^{100} g(x) dx.$$

La fonction  $g$  est continue sur  $[0; 100]$ ; elle admet donc des primitives

sur  $[0; 100]$  et par conséquent:  $\int_0^{100} g(x) dx$  existe.

$$\begin{aligned} \text{D'où: } m &= \frac{1}{100} \left[ G(x) \right]_0^{100} \\ &= \frac{1}{100} \left[ x^2 - x + \frac{1}{0,05} e^{0,05x} \right]_0^{100} \\ &= \frac{1}{100} (10\,000 - 100 + 20 e^5 - 20) \\ &= \frac{9880 + 20e^5}{100}. \end{aligned}$$

Au total:  $m = 98,8 + 0,2 e^5 \approx 128,48.$

3. Interprétons le résultat obtenu:

Cela signifie qu'un semoir coûte en moyenne:  $128,48 \times 100 = 12\,848 \text{ €}$   
à fabriquer par l'entreprise.