Sujet Spécialité

MATHÉMATIQUES

POLYNÉSIE

BAC ES - 2018

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

ÉPREUVE DU MERCREDI 20 JUIN 2018

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 9 pages, y compris celle-ci.

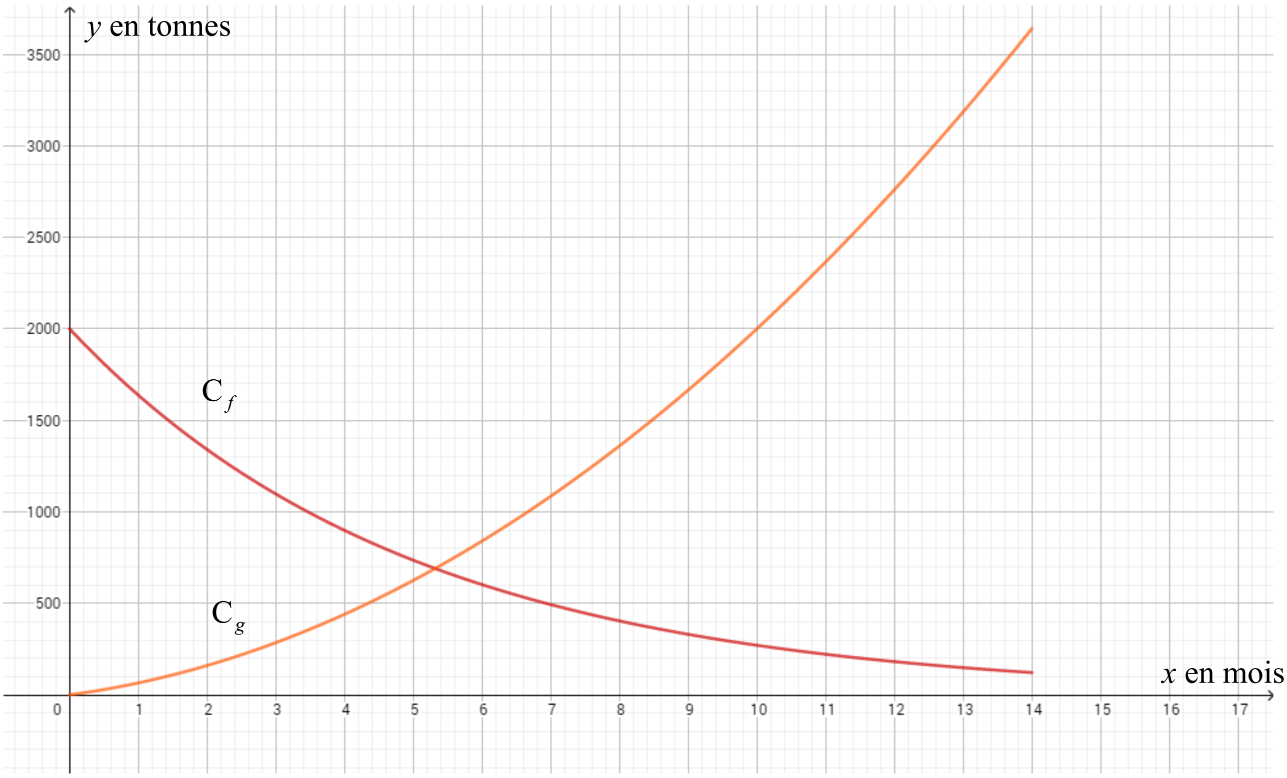
EXERCICE 4 (6 points)

Les parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

Une usine qui fabrique un produit A, décide de fabriquer un nouveau produit B afin d'augmenter son chiffre d'affaires. La quantité, exprimée en tonnes, fabriquée par jour par l'usine est modélisée par :

- la fonction f définie sur $[0\,;14]$ par $f(x)=2\ 000\,\mathrm{e}^{-0,2x}$ pour le produit A ;
- la fonction g définie sur $[0\,;14]$ par $g(x)=15x^2+50x$ pour le produit B,

où x est la durée écoulée depuis le lancement du nouveau produit B exprimée en mois.



Partie A

Par lecture graphique, sans justification et avec la précision permise par le graphique :

1. Déterminer la durée nécessaire pour que la quantité de produit B dépasse celle du produit A.
2. L'usine ne peut pas fabriquer une quantité journalière de produit B supérieure à 3 000 tonnes. Au bout de combien de mois cette quantité journalière sera atteinte ?

Partie B

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;14]$ on pose $h(x)=f(x)+g(x)$.

On admet que la fonction h ainsi définie est dérivable sur $[0\,;14]$.

1. **a.** Que modélise cette fonction dans le contexte de l'exercice ?

b. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;14]$:

$$h'(x)=-400\,\mathrm{e}^{-0,2x}+30x+50$$

2. On admet que le tableau de variation de la fonction h' sur l'intervalle est :

x	0	14
variation de h'	-350	$h'(14)\approx 446$

a. Justifier que l'équation $h'(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;14]$ et donner un encadrement d'amplitude 0,1 de α.

b. En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;14]$.

3. Voici un algorithme :

```
Y← −400 exp(−0,2 X)+30 X +50
Tant que  Y ⩽0
    X← X +0,1
    Y← −400 exp(−0,2 X)+30 X +50
Fin Tant que
```

a. Si la variable X contient la valeur 3 avant l'exécution de cet algorithme, que contient la variable X après l'exécution de cet algorithme ?

b. En supposant toujours que la variable X contient la valeur 3 avant l'exécution de cet algorithme, modifier l'algorithme de façon à ce que X contienne une valeur approchée à 0,001 près de α après l'exécution de l'algorithme.

4. **a.** Vérifier qu'une primitive H de la fonction h sur $[0;14]$ est :

$$H(x)=-10000\,\mathrm{e}^{-0,2x}+5x^3+25x^2$$

b. Calculer une valeur approchée à l'unité près de $\dfrac{1}{12}\displaystyle\int_0^{12} h(x)\,dx$.

c. Donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 4

[Polynésie 2018]

Partie A:

1. Déterminons graphiquement la durée nécessaire pour que la quantité de produit B dépasse celle de produit A:

La quantité de produit B dépasse celle de produit A dès que la courbe $\mathscr{C}g$ se situe au dessus de la courbe $\mathscr{C}f$.

Or cela se produit quand: $x \in]\,5\,;\,6\,[$ (graphiquement).

Plus précisément, avec la précision permise par le graphique, nous obtenons:

$$x \approx 5,3 \text{ mois}.$$

Au total, la durée nécessaire pour que la quantité de produit B dépasse celle de produit A est d'environ: 5, 3 mois.

2. Déterminons au bout de combien de mois la quantité journalière de 3000 tonnes sera atteinte par le produit B:

La quantité journalière de 3000 tonnes sera atteinte pour le produit B quand: $g(x) = 3000$.

Or cela se produit quand: $x \in]\,12\,;\,13\,[$ (graphiquement).

Plus précisément, avec la précision permise par le graphique, nous obtenons:

$$x \approx 12,7 \text{ mois}.$$

Au total, la quantité journalière de 3000 tonnes sera atteinte pour le produit B au bout d'environ: 12, 7 mois.

Partie B:

1. a. Déterminons ce que modélise cette fonction:

Comme $h(x) = f(x) + g(x)$, $h(x)$ représente la quantité totale de produit A et de produit B fabriquées par l'usine.

1. b. Montrons que, pour tout $x \in [0; 14]$, $h'(x) = -400\, e^{-0,2x} + 30x + 50$:

Ici: • $f(x) = 2000\, e^{-0,2x}$

• $g(x) = 15x^2 + 50x$

• $Df = Dg = [0; 14]$.

f et g sont toutes deux dérivables sur $[0; 14]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' et g' sur $[0; 14]$.

Pour tout $x \in [0; 14]$:

• $f'(x) = -0,2 \times 2000 \times e^{-0,2x}$

$= -400\, e^{-0,2x}$;

• $g'(x) = 30x + 50$.

Ainsi, pour tout $x \in [0; 14]$: $h'(x) = f'(x) + g'(x)$

cad: $h'(x) = -400\, e^{-0,2x} + 30x + 50$.

2\. a. a1. **Montrons que sur $[\,0\,;\,14\,]$, l'équation $h'(x) = 0$ admet une solution unique α:**

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

> • Soit f une fonction continue sur $[a\,;\,b]$.
>
> Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a\,;\,b]$ tel que: $f(c) = K$.
>
> Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a\,;\,b]$.
>
> • Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a\,;\,b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a\,;\,b]$.

Ici:
- h' est continue sur $[\,0\,;\,14\,]$.
- " $k = 0$ " est compris entre: $h'(0) = -350$
  et: $h'(14) \approx 446$.
- h' est strictement croissante sur $[\,0\,;\,14\,]$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $h'(x) = 0$ ($k = 0$) admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $[\,0\,;\,14\,]$.

Au total: $h'(x) = 0$ admet exactement une solution unique α sur $[\,0\,;\,14\,]$.

2. a. a2. Donnons un encadrement d'amplitude 0, 1 de α:

Par tâtonnement et à l'aide d'une calculatrice, nous trouvons: $\alpha \in [\,4,1\,;\,4,2\,]$.

Au total, un encadrement d'amplitude 0, 1 de α est: $4,1 \leqslant \alpha \leqslant 4,2$.

2. b. Déduisons-en les variations de la fonction h sur [0; 14]:

D'après les questions précédentes, nous pouvons en déduire que:

- h est strictement décroissante sur: $[\,0\,;\,\alpha\,[$, car $h'(x) < 0$,
- h est strictement croissante sur: $]\,\alpha\,;\,14\,]$, car $h'(x) > 0$,
- h admet un minimum au point: $M\,(\alpha\,;\,h\,(\alpha))$.

3. a. Déterminons ce que contient alors la variable X après l'exécution de cet algorithme:

Notons qu'après l'exécution de cet algorithme, la variable X contient, à 0, 1 près, la première valeur telle que $Y > 0$ **cad** $h'(X) > 0$ soit: une valeur approchée de α à 0, 1 près.

3. b. Modifions l'algorithme de façon à ce que X contienne une valeur approchée à 0, 001 près de α après l'exécution de l'algorithme:

En supposant toujours que la variable X contienne la valeur 3 avant l'exécution de cet algorithme, pour répondre à la question nous devons juste modifier la ligne $X \leftarrow X + 0,1$.

Modification de la ligne $X \leftarrow X + 0,1$ en: $X \leftarrow X + 0,001$.

4. a. Vérifions que H est bien une primitive de la fonction h sur [0; 14]:

Sur l'intervalle [0; 14], H est une primitive de h ssi: $H'(x) = h\,(x)$.

Ici: $H(x) = -10000e^{-0,2x} + 5x^3 + 25x^2$.

D'où: $H'(x) = (-10000) \times (-0,2e^{-0,2x}) + 15x^2 + 50x$

$$= 2000e^{-0,2x} + 15x^2 + 50x = h(x).$$

Au total: H est bien une primitive de h sur [0; 14].

4. b. Calculons une valeur approchée à l'unité près de $\frac{1}{12}\int_0^{12} h(x)\,dx$:

Préalablement, notons que $\frac{1}{12}\int_0^{12} h(x)\,dx$ correspond à **la valeur moyenne " m " de h sur [0; 12]**.

Dans ces conditions: $m = \frac{1}{12}\int_0^{12} h(x)\,dx$

$$= \frac{1}{12}\left[H(x)\right]_0^{12}$$

$$= \frac{1}{12}\Big(H(12) - H(0)\Big)$$

$$\approx 1778.$$

Ainsi, la valeur moyenne de h sur [0; 12] est d'environ: 1778.

4. c. Donnons une interprétation de m dans le contexte de l'exercice:

Ici, l'interprétation de **m** est: m correspond à la production moyenne en produits A et B sur les 12 premiers mois.