Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

ÉPREUVE DU MERCREDI 20 JUIN 2018

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

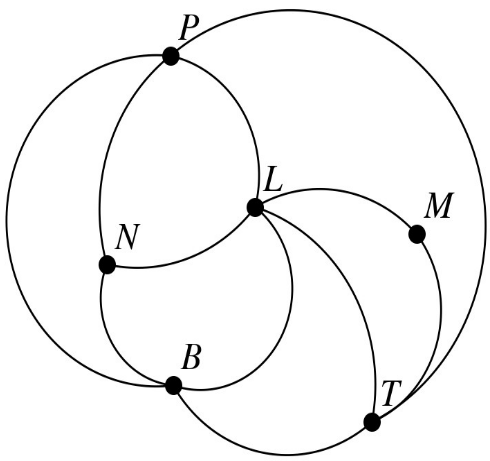
Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 9 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 3 (4 points)

Un journaliste britannique d'une revue consacrée à l'automobile doit tester les autoroutes françaises. Pour remplir sa mission, il décide de louer une voiture et de circuler entre six grandes villes françaises : Bordeaux (B), Lyon (L), Marseille (M), Nantes (N), Paris (P) et Toulouse (T).

Le réseau autoroutier reliant ces six villes est modélisé par le graphe ci-dessous sur lequel les sommets représentent les villes et les arêtes les liaisons autoroutières entre ces villes.



Partie A

1. **a.** Quel est l'ordre du graphe ?

   b. Le graphe est-il complet ? Justifier la réponse.

2. **a.** On admet que le graphe est connexe. Le journaliste envisage de parcourir chacune des liaisons modélisées sur le graphe une fois et une seule. Est-ce possible ? Justifier la réponse.

   b. Le journaliste va-t-il pouvoir louer sa voiture dans un aéroport parisien, parcourir chacune des liaisons une et une seule fois puis rendre la voiture dans le même aéroport ? Justifier la réponse.

3. On nomme G la matrice d'adjacence du graphe (les villes étant rangées dans l'ordre alphabétique). On donne :

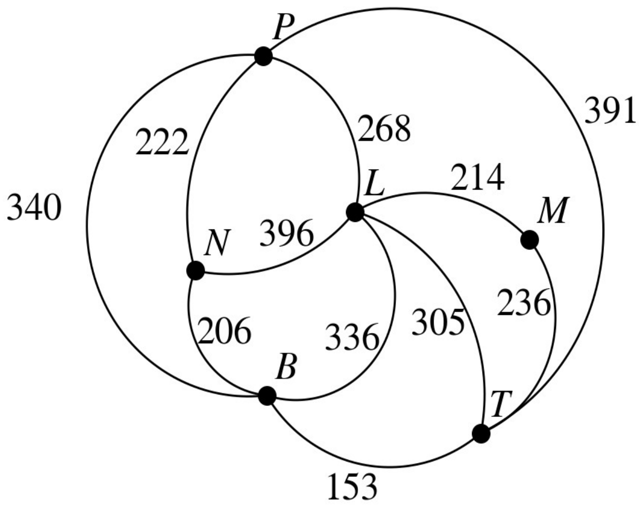
$$G=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G^3=\begin{pmatrix} 10 & 13 & 5 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 12 & 8 & 11 & 13 & 12 \\ 5 & 8 & 2 & 5 & 5 & 7 \\ 10 & 11 & 5 & 6 & 10 & 7 \\ 11 & 13 & 5 & 10 & 10 & 12 \\ 12 & 12 & 7 & 7 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

a) Recopier et compléter la matrice d'adjacence.

b) Alors qu'il se trouve à Paris, le rédacteur en chef demande au journaliste d'être à Marseille exactement trois jours plus tard pour assister à une course automobile. Le journaliste décide chaque jour de s'arrêter dans une ville différente. Déterminer le nombre de trajets possibles.

Partie B

On a indiqué sur le graphe ci-dessous le temps nécessaire en minutes pour parcourir chacune des liaisons autoroutières.



Le journaliste se trouve à Nantes et désire se rendre le plus rapidement possible à Marseille.

Déterminer un trajet qui minimise son temps de parcours.

EXERCICE 3

[Polynésie 2018]

Partie A:

1. a. Déterminons l'ordre du graphe:

Nous savons que l'ordre d'un graphe est égal au nombre de sommets.

Or ici, il y a: 6 sommets (B, L, M, N, P, T).

Ainsi: l'ordre du graphe est égal à **6**.

1. b. Justifions le fait que le graphe n'est pas complet:

D'après le cours, nous savons que:

- Deux sommets sont dits adjacents s'ils sont reliés par une arête.
- Un graphe dont les sommets sont 2 à 2 adjacents est aussi appelé graphe complet.

Ici, le graphe n'est pas complet car, par exemple, les sommets P et M ne sont pas adjacents.

Au total: le graphe n'est pas complet.

2. a. Est-ce-possible de parcourir chacune des liaisons modélisées sur le graphe une fois et une seule ?

Cela revient à déterminer si le graphe admet **une chaîne eulérienne**.

D'après le cours:

Le graphe étant connexe, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- Deux sommets (et deux seulement) X et Y de graphe sont de degré impair.
- Le graphe admet une chaîne eulérienne d'extrémités X et Y.

Or ici: le graphe (d'ordre 6) est connexe.

Et, nous avons le tableau des sommets degrés suivant:

Sommets	B	L	M	N	P	T
Degrés	4	5	2	3	4	4

(degré d'un sommet = nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité)

Comme il y a 2 sommets et deux seulement L et N qui sont de degré impair, d'après le **théorème d'Euler**, le graphe admet une chaîne eulérienne.

Donc: **oui**, c'est possible de parcourir chacune des liaisons modélisées sur le graphe une fois et une seule.

2. b. Va-t-il pouvoir le faire ?

Comme il y a deux sommets de degrés impairs, d'après le théorème d'Euler:

non, il n'est pas possible au journaliste de réaliser son souhait.

3. a. Recopions et complétons la matrice d'adjacence:

Voici la matrice d'adjacence recopiée et complétée:

$$G = \begin{array}{c|cccccc} & B & L & M & N & P & T \\ \hline B & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ L & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ M & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ N & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ P & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ T & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}.$$

3. b. Déterminons le nombre de trajets possibles:

Pour répondre à cette question, il suffit (dans G^3) de déterminer le nombre qui se trouve à l'intersection entre la ligne de P et la colonne de M (ligne 5 et colonne 3).

On trouve ainsi: 5.

Donc **oui cela est possible** et il existe **5** chemins de longueur 3 pour aller de **Paris** à **Marseille**.

Les 5 chemins sont:
- P - B - T - M
- P - N - L - M
- P - T - L - M
- P - L - T - M
- P - B - L - M

Partie B:

Déterminons un trajet qui minimise son temps de parcours:

Notons que: le journaliste se trouve à Nantes et désire se rendre le plus rapidement possible (minimisation du temps) à Marseille.

Après recours à l'algorithme de **Dijkstra**, nous trouvons comme trajet que le journaliste doit suivre pour aller de N à M, tout en minimisant le temps de parcours: le trajet N - B - T - M.

Et ce trajet durera: 206 mn + 153 mn + 236 mn = 595 minutes.

Au total, le trajet que doit suivre le journaliste pour aller de N à M, tout en minimisant son temps de parcours est: **N - B - T - M**, et cela prendra **595 minutes** soit **9 h et 55 mn**.