Corrigé
Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

ÉPREUVE DU MERCREDI 20 JUIN 2018

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 9 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 2 (5 points)

Les parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Les résultats numériques seront donnés, si nécessaire, sous forme approchée à 0,001 près.

Partie A

Une entreprise est composée de 3 services A, B et C d'effectifs respectifs 450, 230 et 320 employés.

Une enquête effectuée sur le temps de parcours quotidien entre le domicile des employés et l'entreprise a montré que :

40% des employés du service A résident à moins de 30 minutes de l'entreprise ;

20% des employés du service B résident à moins de 30 minutes de l'entreprise ;

80% des employés du service C résident à moins de 30 minutes de l'entreprise.

On choisit au hasard un employé de cette entreprise et on considère les événements suivants :

A : « l'employé fait partie du service A » ;

B : « l'employé fait partie du service B » ;

C : « l'employé fait partie du service C » ;

T : « l'employé réside à moins de 30 minutes de l'entreprise » .

On rappelle que si E et F sont deux événements, la probabilité d'un événement E est notée $\mathrm{P}(E)$ et celle de E sachant F est notée $\mathrm{P}_F(E)$.

1. **a.** Justifier que $\mathrm{P}(A)=0,45$.

b. Donner $\mathrm{P}_A(T)$.

c. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré en indiquant les probabilités associées à chaque branche.

2. Déterminer la probabilité que l'employé choisi soit du service A et qu'il réside à moins de 30 minutes de son lieu de travail.

3. Montrer que $\mathrm{P}(T)=0,482$.

4. Sachant qu'un employé de l'entreprise réside à plus de 30 minutes de son lieu de travail, déterminer la probabilité qu'il fasse partie du service C.

5. On choisit successivement de manière indépendante 5 employés de l'entreprise. On considère que le nombre d'employés est suffisamment grand pour que ce tirage soit assimilé à un tirage avec remise. Déterminer la probabilité qu'exactement 2 d'entre eux résident à moins de 30 minutes de leur lieu de travail.

Partie B

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque employé en France, associe son temps de trajet quotidien, en minutes, entre son domicile et l'entreprise. Une enquête montre que X suit une loi normale d'espérance 40 et d'écart type 10.

1. Calculer la probabilité que le trajet dure entre 20 minutes et 40 minutes.
2. Déterminer $\mathrm{P}(X > 50)$.
3. À l'aide de la méthode de votre choix, déterminer une valeur approchée du nombre a à l'unité près, tel que $\mathrm{P}(X > a) = 0,2$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Cette entreprise souhaite faire une offre de transport auprès de ses employés. Un sondage auprès de quelques employés est effectué afin d'estimer la proportion d'employés dans l'entreprise intéressés par cette offre de transport. On souhaite ainsi obtenir un intervalle de confiance d'amplitude strictement inférieure à 0,15 avec un niveau de confiance de 0,95. Quel est le nombre minimal d'employés à consulter ?

EXERCICE 2

[Polynésie 2018]

Partie A:

1. a. Justifions que $P(A) = 0,45$:

D'après l'énoncé, nous avons:

- A = " l'employé fait partie du service A ".
- B = " l'employé fait partie du service B ".
- C = " l'employé fait partie du service C ".
- T = " l'employé réside à moins de 30 minutes de l'entreprise ".
- $\overline{T}$ = " l'employé réside à plus de 30 minutes de l'entreprise ".

- $P(A) = 45\% \left(\dfrac{450}{1000}\right)$
- $P(B) = 23\%$
- $P(C) = 32\%$.

- $P_A(T) = 40\%$
- $P_A(\overline{T}) = 1 - 40\% = 60\%$.

- $P_B(T) = 20\%$
- $P_B(\overline{T}) = 1 - 20\% = 80\%$.

- $P_C(T) = 80\%$
- $P_C(\overline{T}) = 1 - 80\% = 20\%$.

Dans ces conditions, calculons: $P(A)$.

L'effectif total de l'entreprise est de: $450 + 230 + 320 = 1000$ employés.

Or, il y a 450 employés dans le service A.

D'où: $P(A) = \frac{450}{1000}$ => $P(A) = 45\%$.

Au total, nous avons bien: $P(A) = 45\%$.

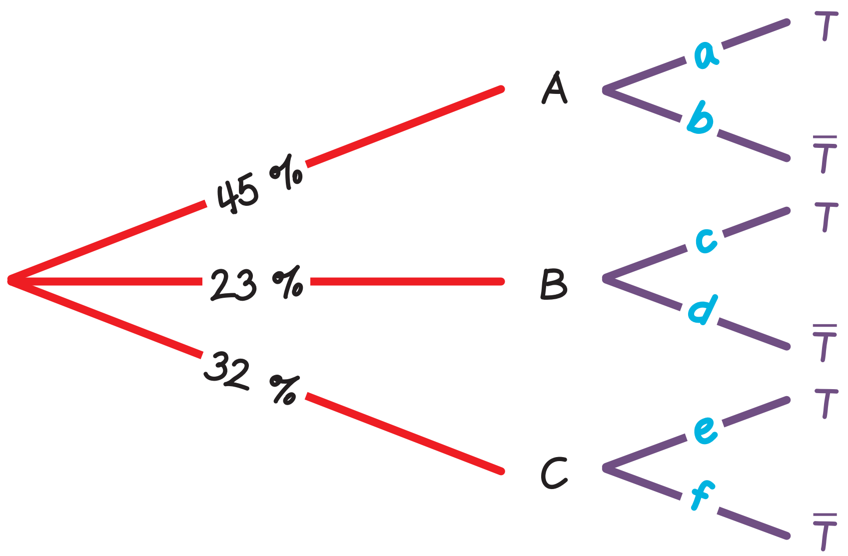
1. b. Donnons $P_A(T)$:

$P_A(T)$ correspond au pourcentage d'employés du service A résidant à moins de 30 minutes de l'entreprise.

D'où: $P_A(T) = 40\%$.

1. c. Traduisons la situation par un arbre pondéré:

Nous avons ainsi l'arbre pondéré suivant:



, avec:

- $a = 40\%$
- $b = 60\%$
- $c = 20\%$
- $d = 80\%$
- $e = 80\%$
- $f = 20\%$

.

2. Déterminons la probabilité que l'employé choisi soit du service A et qu'il réside à moins de 30 minutes de son lieu de travail:

Cela revient à calculer: $P(A \cap T)$.

$P(A \cap T) = P_A(T) \times P(A)$.

Ainsi: $P(A \cap T) = 40\% \times 45\% \Rightarrow P(A \cap T) = 18\%$.

Au total, la probabilité que l'employé choisi soit du service A et réside à moins de 30 minutes de son lieu de travail est de: 18%.

3. Montrons que $P(T) = 0,482$:

Il s'agit de calculer: $P(T)$.

Or, l'événement $T = (T \cap A) \cup (T \cap B) \cup (T \cap C)$.

D'où: $P(A) = P(T \cap A) + P(T \cap B) + P(T \cap C)$

$$= P_A(T) \times P(A) + P_B(T) \times P(B) + P_C(T) \times P(C).$$

Ainsi: $P(A) = 40\% \times 45\% + 20\% \times 23\% + 80\% \times 32\% \Rightarrow P(T) = 48,2\%$.

Au total, nous avons bien: $P(T) = 0,482$.

4. Déterminons $P_{\overline{T}}(C)$:

$$P_{\overline{T}}(C) = \frac{P(\overline{T} \cap C)}{P(\overline{T})}$$

$$= \frac{P_C(\overline{T}) \times P(C)}{1 - P(T)}.$$

Ainsi: $P_{\overline{T}}(C) = \dfrac{20\% \times 32\%}{1 - 48,2\%} \Rightarrow P_{\overline{T}}(C) \approx 12,4\%$.

Au total, la probabilité demandée est d'environ: 12, 4%.

5. **Déterminons la probabilité qu'exactement 2 d'entre eux résident à moins de 30 minutes de leur lieu de travail**:

Soit l'expérience aléatoire consistant à choisir successivement de manière indépendante 5 employés de l'entreprise, en considérant que le nombre d'employés est suffisamment grand pour que ce tirage soit assimilé à un tirage avec remise.

Soient les événements $T =$ " l'employé réside à moins de 30 minutes de l'entreprise ", et $\overline{T} =$ " l'employé réside à plus de 30 minutes de l'entreprise ".

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'employés résidants à moins de 30 minutes de leur lieu de travail parmi les 5 employés de l'entreprise tirés au hasard.

Nous sommes en présence de 5 épreuves aléatoires identiques et indépendantes.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de T suit donc une loi binômiale de paramètres: $n = 5$ et $p = 48,2\%$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B\,(5\,;\,48,2\%)$.

En fait, on répète 5 fois un schéma de Bernoulli.

Ici, il s'agit de calculer: $P\,(X = 2)$ avec: $X \rightsquigarrow B\,(5\,;\,48,2\%)$.

$$P\,(X = 2) = \binom{5}{2}\,(48,2\%)^2\,(1 - 48,2\%)^3$$

$$\Rightarrow\ P\,(X = 2) \approx 32,3\%.$$

(à l'aide d'une machine à calculer)

Au total, la probabilité qu'exactement 2 employés résident à moins de 30 minutes de leur lieu de travail est d'environ: 32, 3%.

Partie B:

1. Calculons la probabilité que le trajet dure entre 20 et 40 minutes:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X suit la loi normale d'espérance $\mu = 40$ mn et d'écart type $\sigma = 10$ mn.
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de calculer: $P(20 < X < 40)$.

$$P(20 < X < 40) = P\left(\frac{20-40}{10} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{40-40}{10}\right)$$

$$= P(-2 < T < 0)$$

$$= P(T < 0) - P(T < -2), \text{ propriétés du cours}$$

$$= P(T < 0) - (1 - P(T < 2)), \text{ propriétés du cours}$$

$$= P(T < 0) + P(T < 2) - 1.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$P(20 < X < 40) \approx 0,5 + 0,9772 - 1$ cad: $P(20 < X < 40) \approx 47,72\%$.

Au total: $P(20 < X < 40) \approx 47,7\%$.

2. Déterminons $P(X > 50)$:

$$P(X > 50) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{50-40}{10}\right)$$

$$= P(T > 1)$$

$$= 1 - P(T \leqslant 1).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$P(X > 50) \approx 1 - 0,8413\%$ cad: $P(X > 50) \approx 15,87\%$.

Au total: $P(X > 50) \approx 15,9\%$.

3. a. Déterminons une valeur approchée de " a " telle que $P(X > a) = 0,2$:

Il s'agit de déterminer " a " sachant que: $P(X > a) = 0,2$.

$$P(X > a) = 0,2 \iff P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{a - 40}{10}\right) = 0,2$$

$$\iff P\left(T > \frac{a - 40}{10}\right) = 0,2$$

$$\iff 1 - P\left(T \leqslant \frac{a - 40}{10}\right) = 0,2$$

$$\iff P\left(T \leqslant \frac{a - 40}{10}\right) = 0,8.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{a - 40}{10} \approx 0,8416 \implies a \approx 49 \text{ minutes, arrondie à l'unité.}$$

Au total: $P(X > a) = 0,2$ avec $a = 49$ minutes, arrondie à l'unité.

3. b. Interprétons le résultat obtenu:

Cela signifie que 20% des employés résident à plus de 49 minutes de leur lieu de travail.

Partie C:

Déterminons le nombre minimal d'employés à consulter:

D'après le cours, la longueur ou amplitude d'un intervalle de confiance à 95% est: $L = \frac{2}{\sqrt{n}}$.

Or ici: $L \leqslant 15\%$.

Donc il s'agit de déterminer " n " tel que: $L \leqslant 15\%$.

$L \leqslant 15\% \iff \frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 15\% \implies n \geqslant 178$ employés (car $n \in \mathbb{N}$).

Au total: il faudra consulter au minimum 178 employés.